## 正規分布

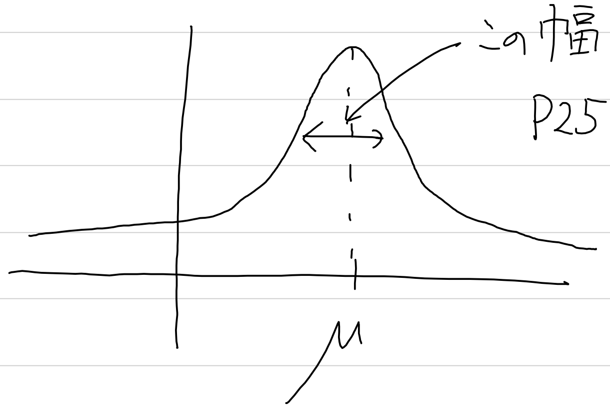
連続型確率変数 $X$ の確率密度関数が

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

であるとき、$X$ は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うという。

ただし $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ である

グラフは




この幅が $\sigma$ によってかわる

P25 図1.5参照

とくに $\mu=0, \sigma=1$ のとき 標準正規分布 という。このとき

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

である。

定理10. $X$ が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、$E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$ である。

標準化 $X$ が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、この標準化

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

を考えると

$$P(a \leq Z \leq b) = P\left(a \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq b\right)$$

$$= P(a\sigma+\mu \leq X \leq b\sigma+\mu)$$

$$= \int_{a\sigma+\mu}^{b\sigma+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

$z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ で変換. $dz = \dfrac{1}{\sigma}dx$.

$x : a\sigma+\mu \to b\sigma+\mu$

$z : a \to b$ より

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \sigma\, dz$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}_{\text{標準正規分布の密度関数}} dz$$

となる ∴ $Z$ は $N(0,1)$ に従う.

さらに $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ より

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)}$$ が成立

公式 1

正規分布表: $e^{-x^2}$ はふつうには積分できない → 表を使う.

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ として.

$x \to \Phi(x)$ を求めるのが 正規分布表 I,

$\Phi(x) \to x$ を求めるのが正規分布表 II.

例. $\Phi(1.76) = 0.4608$

$\Phi(0.83) = 0.2967$

また $\Phi(x) = 0.397$ となる $x$ は $x = 1.2646$

$\Phi(x) = 0.232$ となる $x$ は $x = 0.6189$.

## 正規分布表による確率計算

$Z$ が $N(0,1)$ に従うとき.

$$P(0 \le Z \le b) = \int_0^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} dx = \Phi(b)$$

$$P(a \le Z \le 0) = \int_a^0 \varphi(x)\,dx = \int_0^{-a} \varphi(x)\,dx = \Phi(-a)$$

$\varphi(x)$ が偶関数なので

$a < 0 < b$ のとき.

$$P(a \le Z \le b) = P(a \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le b)$$
$$= \Phi(-a) + \Phi(b)$$

$0 < a < b$ のとき.

$$P(a \le Z \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$P(0 \le Z) = \frac{1}{2}$. を使う.

例題11, 12 問16, 17, 18