重要な確率分布

二項分布

定義. $0 < p < 1$ とする. X が

$$P(X=i) = {}_nC_i\, p^i (1-p)^{n-i} \quad (0 \leq i \leq n)$$

をみたすとき, X は二項分布 $B(n,p)$ に従うという.

→ 確率 p であたるくじ を n 回ひいたときのあたりの数.

定理8. X が $B(n,p)$ に従うとき.

$E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ である.

(:) 証明は A.1 参照

例題9 を解説.

問14 を解く.

ポアソン分布

$B(n,p)$ において 期待値 np を $\lambda>0$ に保ったまま $n\to\infty$

とした分布をポアソン分布という. $p=\dfrac{\lambda}{n}$ なので.

$$
\begin{aligned}
&{}_nC_i\, p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!\; i!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} \\
&= \frac{\lambda^i}{i!}\, \frac{n!}{(n-i)!\, n^i} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}
\end{aligned}
$$

ここで

$$\frac{n!}{(n-i)!\, n^i} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}^{i\text{個の積}}}{n^i} \longrightarrow 1 \quad (n\to\infty)$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-i} \longrightarrow 1.$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right)^{\lambda} \longrightarrow e^{-\lambda}$$ より

$${}_nC_i\, p^i (1-p)^{n-i} \longrightarrow e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$$ となる.

定義 $P(X=i)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}$ $(i=0,1,2,\cdots)$

をみたすXをパラメータλのポアソン分布に従うという.

定理9 Xがポアソン分布に従うとき

$E(X)=V(X)=\lambda$ である.

∵ 証明はA.1参照.

例. 1時間あたり,平均でλ回電話がかかってくるとする.

ある1時間にかかってくる電話の回数Xの確率分布は?

→ 1時間をn等分する(nは十分大きい)

このとき$\frac{1}{n}$時間でかかってくる確率は$\frac{\lambda}{n}$となる.

($\frac{\lambda}{n}$が小さいので2回はほぼおこらない).

∴ Xはほぼ$B(n,p)$に従う.

また,ポアソン分布を使って二項分布を近似することもできる.

例題10, 問15