# 確率・統計.

試行：調査や実験（サイコロ投げ、じゃんけんなども含む）

事象：試行の結果起こる事柄.

↳ これが起こる割合が確率.

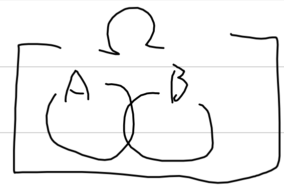
事象について.

| | 説明 | 数学的な意味. |
|---|---|---|
| 全事象 $\Omega$ | おこりうる結果全てを集めたもの | (全体)集合 |
| 標本点 | おこる結果の1つ1つ | $\Omega$ の元 |
| 事象 A, B | 試行の結果おこる事柄 | $\Omega$ の部分集合. |
| 根元事象 | それ以上分割できない事象 | 標本点1点からなる集合 |
| 和事象 $A \cup B$ | AかBのどちらかがおこる | 和集合 |
| 積事象 $A \cap B$ | AとBの両方がおこる | 積集合 |
| 余事象 $A^c$ | Aがおこらない | 余集合. |
| 空事象 $\emptyset$ | 絶対におこらない事象 | 空集合. |

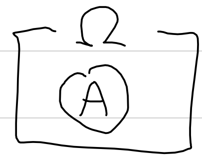
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ などもある

AとBが互いに排反

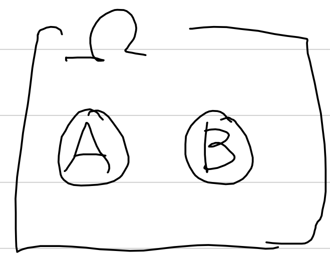
⇔ $A\cap B=\phi$.




$A_1,\cdots,A_n$が互いに排反




⇔ $A_i\cap A_j=\phi \quad (i\neq j)$




例題1. サイコロ投げを考えると.

全事象 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

偶数がでる事象 $A$ は $A=\{2,4,6\}$ などとなる.

$B=\{4,5,6\}$, $C=\{1,2\}$ とすれば.

$A\cap B=\{4,6\}$, $A\cup B=\{2,4,5,6\}$.

$B^c=\{1,2,3\}$, $A\setminus C=\{4,6\}$ $A\cap B\cap C=\phi$.

この事象に確率を定義する.

**確率の定義**　任意の事象 $A$ に対し、実数 $P(A)$ が定まり、
以下の3つをみたすとき、$P$ を確率、$P(A)$ を $A$ がおこる確率という。

(P1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(P2) $P(\Omega) = 1$

(P3) $A_1, \cdots, A_n$ が互いに排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

とくに $A$, $B$ が排反なら

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**定理1.**　次が成立

(1) $P(A^c) = 1 - P(A)$

(2) $P(\phi) = 0$

(3) $A \subset B$ なら $P(A) \leq P(B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

∵ (1) $A \cup A^c = \Omega$ かつ $A$ と $A^c$ は排反より

$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1.$

(2) $P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 0$

(3) $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = A \cup (A^c \cap B)$ より

$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A)$

(4) (3) より

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ また

$A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ より

$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ //.

<u>例題1のつづき.</u>

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(B^c) = \frac{1}{2}$ などがわかる.

<u>問1, 2, 3を解け</u>

# 条件付確率と独立性

**定義** $P(A) \neq 0$ であるとき

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

を $A$ がおこったときに $B$ がおこる条件付確率という

| | $A$ | $A^c$ |
|---|---|---|
| $B$ | $A \cap B$ | $A^c \cap B$ |
| $B^c$ | $A \cap B^c$ | $A^c \cap B^c$ |

$A$ がおこって $B$ もおこってる

$A$ がおこってる

$A$ がおこってない
→ こっちは無視

**定理2** $P(A) \neq 0$ のとき

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

が成立

**定義** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ をみたすとき

$A$ と $B$ は(互いに)独立という

定理3. $P(A), P(B) \neq 0$ とする. 次の3つは同値

(1) AとBは独立

(2) $P(B|A) = P(B)$

(3) $P(A|B) = P(A)$.

∵ 定理2より $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \iff P(B|A) = P(B)$

∴ (1)と(2)は同値. (1)と(3)も同様.

例題2を解説

問4.5.6を解け.