# Grover のアルゴリズム

**前提** $f:\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ について.

$^\exists x_0 \in \{0,1\}^n$ s.t.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = x_0) \\ 0 & (x \neq x_0) \end{cases}$$ が成り立っているとする

**問** $x_0$ をみつけよ!

⇝ 普通にやると. $2^n - 1$ 回 で確率 1.

$2^{n-1}$ 回 で確率 $\frac{1}{2}$ になる.

**Lem 4.3** H において. $x \in H$, $\|x\| = 1$ とし,

$D = 2|x\rangle\langle x| - I$ とすると

(1) $Dx = x$

(2) $y \perp x \Rightarrow Dy = -y$

(3) $y \perp x \Rightarrow D(ax + by) = ax - by$.

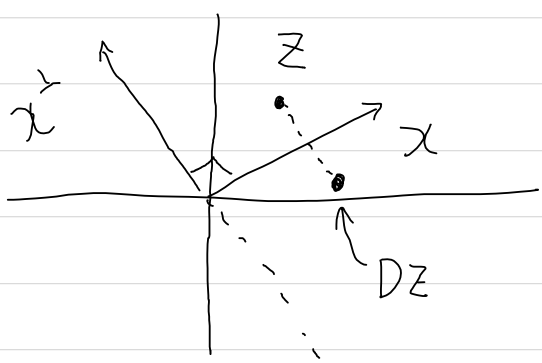
∵ (1) $Dx = 2|x\rangle\langle x|x - Ix = 2\langle x, x\rangle x - x = x$

(2) $Dy = 2|x\rangle\langle x|y - Iy = 2\langle x, y\rangle x - y = -y$.

(3) (1)(2) よりわかる //.

Lem 4.3の意味

$\mathbb{C}^2$において. $\|x\|=1$をとり. $x^\perp \in \mathbb{C}^2$ を $x \perp x^\perp$ をみたすようにとる




このときある点 $z$ が

$z = ax + bx^\perp$ とできたとすると

$Dz = ax - bx^\perp$ となる.

つまり. $Dz$は. ベクトル$x$を軸に$z$と線対称の点になる.

さて. $N = 2^n$ とし. $\theta$ を $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{N}}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ をみたすものとする. また. $\xi = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle$ とし.

$D = 2|\xi\rangle\langle\xi| - I$ とする.

Grover のアルゴリズム

$\in \left(\bigotimes^n \mathbb{C}^2\right) \otimes \mathbb{C}^2$.

1. 初期状態として $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right)$ をとる.

2. 次を $\left[\frac{\pi}{4\theta}\right]$ 回くり返す

$U_f$ は Deutsch-Jozsa といっしょ

(1) 量子状態に $U_f$ をかける. $U_f \psi_k = \varphi_k$ とする.

(2) 量子状態に $D \otimes I$ をかける. $(D \otimes I)\varphi_k = \psi_{k+1}$ とする.

3. $\bigotimes^n \mathbb{C}^2$ において標準基底で観測する.

解説. $x_0^\perp = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\substack{x \in \{0,1\}^n \\ x \neq x_0}} |x\rangle$ とすると.

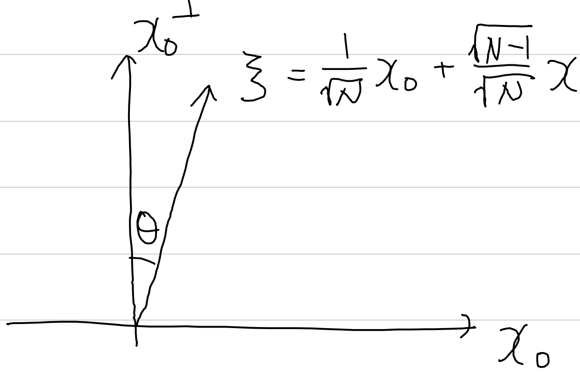
$\|x_0^\perp\| = 1$, $x_0^\perp \perp x_0$ がわかる

$|x_0\rangle$ が正確だけど.少し省略してる

ここで $\xi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(|x_0\rangle + \sum_{x \neq x_0} |x\rangle\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{N}} |x_0\rangle + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} |x_0^\perp\rangle$ とできる.

$x_0, x_0^{\perp}$ で軸をとると.




$\xi = \frac{1}{\sqrt{N}} x_0 + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} x_0^{\perp} = (\psi_0$の左$)$ となる.

## Lem 4.4.

$$U_f(|x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)) = -|x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

$$U_f(|x\rangle \otimes (|0\rangle - |\rangle)) = |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \quad \left(\begin{array}{l} x \in \{0,1\}^n \\ x \neq x_0 \end{array}\right)$$

$\because$ $U_f(|x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle))$

1

$$= |x_0\rangle \otimes (|0 \oplus f(x_0)\rangle - |1 \oplus f(x_0)\rangle)$$

$$= |x_0\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle) = -|x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

$U_f(|x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle))$

$$= |x_0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

//

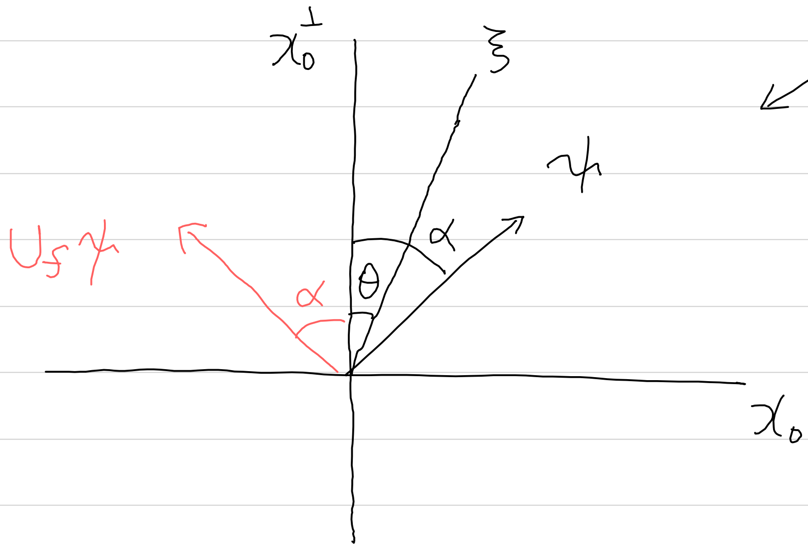
これより

$$U_f\left(a|x_0\rangle + b|x_0^{\perp}\rangle\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right)$$

$$= \left(-a|x_0\rangle + b|x_0^{\perp}\rangle\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right)$$

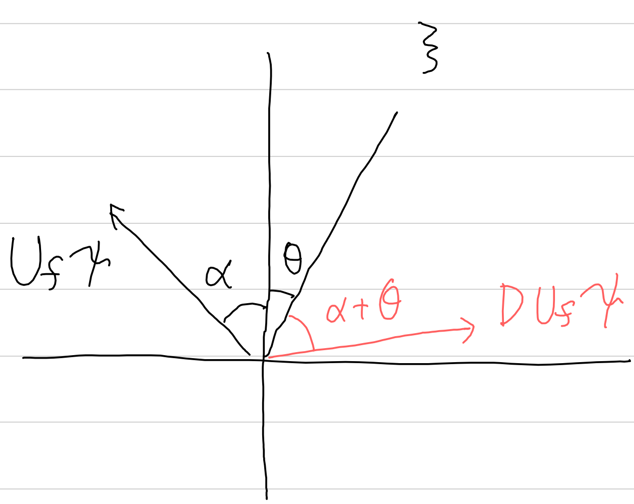
となり、$U_f$ が軸 $x_0^{\perp}$ による線対称を与えることがわかる。

今 $\psi = \sin\alpha|x_0\rangle + \cos\alpha|x_0^{\perp}\rangle$ とする $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.




← $U_f$ をかけた図

$\xi$ による線対称




← さらに D をかけた図

$$\therefore\ DU_f\psi = \sin(\alpha+2\theta)|x_0\rangle + \cos(\alpha+2\theta)|x_0^{\perp}\rangle$$

となる

$\swarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ は省略

今、$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}|x_0\rangle + \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}|x_0^\perp\rangle = \sin\theta\,|x_0\rangle + \cos\theta\,|x_0^\perp\rangle$ より

$\psi_k = \sin((2k+1)\theta)\,|x_0\rangle + \cos((2k+1)\theta)\,|x_0^\perp\rangle$ となる.

目的は $x_0$ をみつけることなので

$\sin((2k+1)\theta)$ が 1に近くなるところをさぐる.

$\therefore$ $(2k+1)\theta = \frac{\pi}{2}$ となったらうれしいのでおおよそ

$k = \frac{\pi}{4\theta} - \frac{1}{2}$ となる. $\therefore$ $l = \left[\frac{\pi}{4\theta}\right]$ とする

lem 4.5 $l = \left[\frac{\pi}{4\theta}\right]$ のとき.

$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq (2l+1)\theta \leq \frac{\pi}{2} + \theta$$ である.

$\because$ $\frac{\pi}{4\theta} - 1 \leq l \leq \frac{\pi}{4\theta}$ より

$$\frac{\pi}{2\theta} - 1 \leq 2l+1 \leq \frac{\pi}{2\theta} + 1$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta \leq (2l+1)\theta \leq \frac{\pi}{2} + \theta$$ となる //

$\therefore \sin((2l+1)\theta) \geq \sin(\frac{\pi}{2} \pm \theta) = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}}$

$\therefore \gamma_l$ を標準基底で観測すると.

$\|$

$\sin((2l+1)\theta)|x_0\rangle + \cos((2l+1)\theta)|x_0^{\perp}\rangle$

$x_0$ が確率 $\sin^2((2l+1)\theta) \geq \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$

で観測される!