§4 量子アルゴリズム

まず、これまでの公理を思い出す。

公理1.

量子状態は $x \in H$, $\|x\|=1$ で表される

公理2.

量子状態 x を CONS $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ で観測できる。

この観測で数値 i が確率 $|\langle e_i, x\rangle|^2$ で検出され、

その後量子状態は e_i になる

公理3.

量子状態 x_1, x_2 があったとき、その結合は

$x_1 \otimes x_2 \in H_1 \otimes H_2$ で表される。

公理4.

量子状態 x への操作は $U \in B(H)$, ユニタリを用いて、

Ux で表される。

$\leftarrow \{f_j \otimes g_k\}$ はCONS.

公理5　$\psi = \sum_{j,k} \alpha_{jk}(f_j \otimes g_k) \in H_1 \otimes H_2$ を、H_1 において

CONS $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ で観測すると、数値 i が

確率 $\sum_k |\alpha_{ik}|^2$ で検出される.

以後、ヒルベルト空間は $\mathbb{C}^2$ とそのテンソル積のみ考える.

また $\mathbb{C}^2$ の標準基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を

$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ |1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とかく.

このとき $\bigotimes^{n} \mathbb{C}^2$ のCONSは

$\{ |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes \cdots \otimes |i_n\rangle \mid i_j = 0, 1, \ 1 \leq j \leq n \}$ であるが

表記表として.

$|i_1\rangle \otimes |i_2\rangle = |i_1\rangle |i_2\rangle = |i_1 i_2\rangle$ などとかく.

また. $\dim \bigotimes^{3} \mathbb{C}^2 = 8$ より

$|000\rangle \leftrightarrow |0\rangle, \ |001\rangle \leftrightarrow |1\rangle \cdots$

$\cdots |101\rangle \leftrightarrow |5\rangle, \ \cdots, |111\rangle \leftrightarrow |7\rangle$

のように、2進法, 10進法を対応させることもある.

Deutsch - Jozsa のアルゴリズム

$\{0,1\}^n = \{(i_1, i_2, \cdots, i_n) \mid i_j = 0,1,\ 1 \leq j \leq n\}$ とする.

Def 4.1. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ が.

$^\forall x \in \{0,1\}^n$ に対し. $f(x) = 0$ または

$^\forall x \in \{0,1\}^n$ に対し $f(x) = 1$ のとき. 定数関数という.

$f(x)=0$ となる x の個数と. $f(x)=1$ となる x の個数が

ちょうど半々であるとき. バランス関数という.

問 f は定数関数か, バランス関数とする.

どちらであるか判定するアルゴリズムを考えよ.

答 $f(00\cdots0)$ が 0 か 1 かを確認する. 次に

$f(00\cdots01)$ が 〃 次に

$f(00\cdots010)$ が 〃 と順番に確認し.

0 と 1 の両方が出ればバランス関数

→ このやり方だと、運がよければ2回目でバランス関数とわかる

定数関数と確率するには $2^{n-1}+1$ 回必要。

→ これを量子アルゴリズムで！

準備　f のかわりに、次のユニタリ U_f を使ってよいこととする。

$|x\rangle|b\rangle \in \left(\bigotimes^n \mathbb{C}^2\right) \otimes \mathbb{C}^2$ に対し、

$U_f(|x\rangle|b\rangle) = |x\rangle|b \oplus f(x)\rangle$

注・$\bigotimes^n \mathbb{C}^2$ の CONS は $|\underbrace{i_1 i_2 \cdots i_n}_{x}\rangle$ なので x を $\{0,1\}^n$ の元とみれる。

・$b \oplus f(x)$ は $0+0=0,\ 0+1=1$ 　$1+0=1,\ 1+1=0$ を意味する（排他的論理和）

Lem 4.2　$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in B(\mathbb{C}^2)$ はユニタリであり、

${}^\forall x \in \{0,1\}^n$ に対し、

$\left(\bigotimes^n H\right)|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y \in \{0,1\}^n} (-1)^{\langle x, y\rangle} |y\rangle$ となる。

ただし、$x = (i_1, \cdots, i_n)$、$y = (j_1, \cdots, j_n)$ のとき $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k \pmod 2$。

∵ $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

であるが. さらに変形して

$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)^{0\cdot 0}|0\rangle + (-1)^{0\cdot 1}|1\rangle\right)$

$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((-1)^{1\cdot 0}|0\rangle + (-1)^{1\cdot 1}|1\rangle\right)$ とできる.

ここで

$\langle |y\rangle, (\bigotimes^{n} H)|x\rangle\rangle = \prod_{k=1}^{n}\langle |j_k\rangle, H|i_k\rangle\rangle$

$= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{i_k j_k} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle x, y\rangle}$ となる

∴ Thm 1.22 より

$(\bigotimes^{n} H)|x\rangle = \sum_{y\in\{0,1\}^n}\frac{1}{\sqrt{2^n}}(-1)^{\langle x, y\rangle}|y\rangle$ である //

Deutsch - Jozsa のアルゴリズム.

1. 初期状態を $\psi = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \in (\overset{n}{\otimes} \mathbb{C}^2) \otimes \mathbb{C}^2$ とする.

2. ψ に U_f をかけ.

$$U_f \psi = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle(|0 \oplus f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

3. $U_f \psi$ に $(\overset{n}{\otimes} H) \otimes I_2$ をかける

$$((\overset{n}{\otimes} H) \otimes I_2) U_f \psi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y \in \{0,1\}} (-1)^{\langle x, y \rangle} |y\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$

ここで f が定数関数なら. $f(x) = k$ $(= 0, 1)$ として.

$$= \frac{1}{2^n \sqrt{2}} (-1)^k \sum_{y \in \{0,1\}^n} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{\langle x, y \rangle} |y\rangle(|0\rangle - |1\rangle)$$ となるが.

$$\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{\langle x,y\rangle} = \begin{cases} 1 & y=(0,0,\cdots,0) \\ 0 & y\neq(0,0,\cdots,0) \end{cases}$$ より.

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{2}}(-1)^k \cdot |00\cdots0\rangle(|0\rangle-|1\rangle)$$ となる.

一方 f が バランス関数のとき

$\left(\overset{n}{\otimes} H\otimes I_2\right)U_f\Psi$ の $|00\cdots0\rangle(|0\rangle-|1\rangle)$ の係数は

$$\frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}(-1)^{\langle x,0\cdots0\rangle}$$

$$=\frac{1}{2^n\sqrt{2}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{f(x)}=0$$ となる.

∴ $\left(\overset{n}{\otimes} H\otimes I_2\right)U_f\Psi$ を $\overset{n}{\otimes}\mathbb{C}^2$ において

CONS $\{|x\rangle\}_{x\in\{0,1\}^n}$ で 観測すると.

定数関数 → $00\cdots0$ が確率 1 で検出

バランス関数 → $00\cdots0$ は 検出されない となる //