# §1. ヒルベルト空間

まずは線形空間 (vector space, vec. sp.) の復習から.

**Def. 1.1.**

空でない集合 $V$ に. 次の(I), (II)をみたす. 和, スカラー倍が与えられているとき, $V$ を vec. sp. という.

(I) $+ : V \times V \longrightarrow V$ という和が def. されていて.

defined

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

$\forall x, y, z \in V$ に対し.

(1) $x+y = y+x$

(2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(3) $\exists \mathbb{0} \in V$ s.t. $\forall x \in V$ に対し

$x + \mathbb{0} = x$ 　この $\mathbb{0}$ を零ベクトルという.

(4) $\forall x \in V$ に対し. $\exists -x \in V$ s.t

$x+(-x) = \mathbb{0}$. 　この $-x$ を逆ベクトルという.

(II) $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ というスカラー倍が def. されていて

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times V & \to & V \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

$^\forall x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し.

(1) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ (2) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (4) $1 \cdot x = x$

<u>Exam 1</u>. (1) $\mathbb{C}^n$ は. $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ と

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

和 : $x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$

スカラー倍 : $\alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$ とすると. vec. sp.

(2) $C[0,1] := \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid [0,1]$ 上の連続関数$\}$ は.

$f, g \in C[0,1]$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

和 : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

スカラー倍 : $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ とすると vec. sp.

**Prop. 1.2.** $V$ を vec. sp. とするとき. 次が成立

(1) 零ベクトルはただ1つ.

(2) ${}^\forall x \in V$ に対し逆ベクトルはただ1つ.

(3) $0 \cdot x = 0$, $\alpha \cdot 0 = 0$, $(-1) \cdot x = -x$.

∵ (1) $0$ と $0'$ を零ベクトルとすると.

$0 = 0 + 0' = 0'$ ∴ 零ベクトルはただ1つ.

(2) $-x$ と $-x'$ を $x$ の逆ベクトルとすると.

$-x = -x + 0 = -x + x + -x' = 0 + -x' = -x'$

(3) $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$

∴ 両辺に $-0 \cdot x$ をたせば. $0 \cdot x = 0$ となる.

$\alpha 0 = \alpha(0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha 0$ よりわかる.

$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) x = (1-1) x = 0 \cdot x = 0$

よりわかる.

**Def 1.3.** $V$の空でない部分集合(subset) $W$が次の(1),(2)をみたすとき $W$を部分空間(subsp.)という.

(1) ${}^\forall x, y \in W$ に対し, $x+y \in W$

(2) ${}^\forall x \in W$, ${}^\forall \alpha \in \mathbb{C}$ に対し. $\alpha x \in W$.

**Prop 1.4.** $W$を$V$のsubsp.とする.

(1) $\mathbb{0} \in W$ である

(2) ${}^\forall x \in W$ に対し. $-x \in W$.

∵ $x \in W$ に対し. $\mathbb{0} = 0 \cdot x \in W$ より (1)が

$-x = (-1) \cdot x \in W$ より (2)がわかる.

⟶ subsp.はそれ自身がvec. sp.である.

**Def 1.5** ${}^\forall v_1, \cdots, v_n \in V$, ${}^\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ に対し.

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ の形のベクトルを

$v_1, \cdots, v_n$ の1次結合という. また

$$\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n\}$$

を $v_1, \cdots, v_n$ で生成される(張られる) subsp. という.

Prop 1.6. $W_1, W_2$ が subsp. のとき. $W_1 \cap W_2$ も subsp.

☺ $W_1 \ni \mathbb{0}, W_2 \ni \mathbb{0}$ より $W_1 \cap W_2 \ni \mathbb{0}$.

$x, y \in W_1 \cap W_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とする.

$x, y \in W_1$ より $x + y \in W_1$, $x, y \in W_2$ より $x + y \in W_2$

$\therefore x + y \in W_1 \cap W_2$. また

$x \in W_1$ より $\alpha x \in W_1$, $x \in W_2$ より $\alpha x \in W_2$ $\therefore \alpha x \in W_1 \cap W_2$ //

Def 1.7.

$W_1, W_2$ が subsp. のとき.

$W_1 + W_2 = \{x + y \mid x \in W_1, y \in W_2\}$ は subsp. になる.

これを $W_1, W_2$ の和空間という.

## 基底と次元

Def 1.8. $v_1, \cdots, v_n \in V$ が次をみたすとき, $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立という.

条件: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad (\forall i)$

1次独立でないとき, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属 という.

Exam 2.

(1) $\mathbb{C}^n$の基本ベクトル $e_1, \cdots, e_n$ は 1次独立.

(2) $M(m,n;\mathbb{C})$ において. $(i,j)$ 成分が1. それ以外が0の行列を $E_{ij}$ とする. $\{E_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ は 1次独立

(3) $C[0,1]$ において. $f_k(x) = x^k$ とすると

$f_1, \cdots, f_n$ は 1次独立

(4) $\mathbb{C}^2$ において. $(1,0), (0,1), (1,1)$ は1次従属.

(5) $v_1 = 0$ なら, $v_1, \cdots, v_n$ は 1次従属

<u>Def 1.9</u> $V \ni v_1, \cdots, v_n$ が次の2つをみたすとき基底(basis)という.

(1) $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立

(2) $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = V$.

<u>Exam 3</u> (1) $\mathbb{C}^n$ において. $e_1, \cdots, e_n$ は基底.

(2) $M(m, n; \mathbb{C})$ において. $\{E_{ij}\}$ は基底

<u>Lem 1.10</u>. $V \ni x_1, \cdots, x_n$ が それぞれ $y_1, \cdots, y_m \in V$ の

1次結合で表され. さらに $n > m$ なら $x_1, \cdots, x_n$ は1次従属.

(∵) 仮定より

$$x_1 = a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \cdots a_{m1} y_m$$
$$\vdots$$
$$x_n = a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m$$

とできたとする. このとき. 次の連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}$$

を考えると.

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$ となるが、係数行列のrankは

$\operatorname{rank} A \leq \min\{n, m\} = m < n$ なので自明でない解

$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ をもつ。ここで

$$[x_1 \cdots x_n] = [y_1 \cdots y_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ より

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = [x_1 \cdots x_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [y_1 \cdots y_m] A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore x_1, \cdots, x_n$ は1次従属

<u>Thm 1.11</u>. $\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ を $V$ の basis とすると、

$m = n$ である。

$\because$ もし $n > m$ なら Lem. 1.10 より $v_1, \cdots, v_n$ は1次従属となり

矛盾 $\therefore n \leq m$. 同様に $m \leq n$ もわかる。

## Def 1.12

$V$が有限個のベクトルで作られたbasisをもつとき

$V$を有限次元(finite dimensional)という。

このとき、basisのベクトルの個数を次元といい、$\dim V$で表す。

また、$\dim\{0\}=0$とし、これ以外のときは無限次元という。
(infinite dimensional)
このとき$\dim V=\infty$とかく。

## Exam 4

(1) $\dim \mathbb{C}^n = n$.

(2) $\dim M(m,n;\mathbb{C}) = m\cdot n$

(3) $C[0,1]$は inf. dim.

## Lem 1.13.

$v_1,\cdots,v_n$が1次独立, $v_1,\cdots,v_{n+1}$が1次従属なら。

$v_{n+1}$は$v_1,\cdots,v_n$の1次結合でかける。

$\because$ 仮定より $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i v_i=0$ をみたす自明でない$\alpha_i$が存在する。

もし$\alpha_{n+1}=0$なら $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=0$ より $\alpha_i=0$ となり矛盾

つづく

$\therefore \alpha_{n+1} \neq 0 \quad \therefore v_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\alpha_{n+1}} v_i$ となる //.

<u>Prop 1.14.</u> $\dim V = n < \infty$ のとき. $v_1, \cdots, v_n$ が1次独立なら.

$v_1, \cdots, v_n$ は basis である.

(:) $\mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\} = V$ を示す.

$V$ の basis を $\{u_1, \cdots, u_n\}$ とすると. $\forall v_{n+1} \in V$ に対し.

Lem 1.10 より $v_1, \cdots, v_{n+1}$ は 1次従属.

$\therefore$ Lem 1.13 より $v_{n+1} \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\}$ //

<u>Prop 1.15</u> $\dim V = n$ ($n = \infty$ もあり) のとき. $\forall m \leq n$ ($m < \infty$) に対し.

1次独立な $v_1, \cdots, v_m$ がとれる.

(:) 帰納法で示す. $m = 1$ のとき, $v_1 \neq 0$ となる $v_1$ をとればよい

$m = k$ のとき示せたとして. $k+1$ $(\leq n)$ のときを示す.

$v_1, \cdots, v_k$ を 1次独立として. $v_{k+1} \notin \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_k\}$ となるようにとると

Lem 1.13 より $v_1, \cdots, v_{k+1}$ は 1次独立. //

## 成分表示

$v_1, \cdots, v_n$ が $V$ の basis のとき

$^\forall v \in V$ は

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$ と

一意的に表せる。これを $v$ の成分表示という。