

## 応用数学2 期末試験対策問題 (ベクトル解析)

1.  $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$  とするとき,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  を求めよ.
2. ベクトル  $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$  について,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  および  $|\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}|$  を求めよ. また,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  と  $\mathbf{c}$  のなす角を  $\varphi$  とするとき,  $\cos \varphi$  の値を求めよ.
3. ベクトル  $\mathbf{a} = (a, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1, 0, b)$  に対して,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が直交するための  $a, b$  の条件と,  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  が平行になるための  $a, b$  の条件をそれぞれ求めよ.
4. 次のベクトル関数  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の導関数を求めよ. また,  $(|\mathbf{a}|^2)'$ ,  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})'$ ,  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})'$ ,  $|\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}'|$  をそれぞれ求めよ.

$$\mathbf{a}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \mathbf{b}(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t}), \quad \mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$$

5. 常ら線  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  ( $a \neq 0$ ) は特異点を持たないことを示し, 接線を求めよ.
6. 曲線  $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), b)$  ( $a \neq 0$ ) の特異点を求めよ.
7.  $a, b$  は 0 でない定数とする. 曲線  $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t), bt)$  上を運動する粒子の速度ベクトルと加速度ベクトルを求めよ.
8. 次の曲線に対して,  $\mathbf{r}(0)$  から  $\mathbf{r}(t)$  までの弧長  $s$  を求め, 弧長パラメータ表示せよ. ただし,  $a \neq 0$  とする.

$$(1) \quad \mathbf{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad (2) \quad \mathbf{r}(t) = (t, 1 + 2t) \quad (3) \quad \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

9. 曲線  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$  について, フレネ標構, 曲率, 捩率を求めよ.
10. 球面  $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$  ( $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ ) について, 偏導関数  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ , 特異点, 曲面積を求めよ. また, 球面の内側と外側のどちらが表であることを答えよ.

11. 次の曲面の単位法線ベクトルを求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2) \quad (2) \quad \mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u)$$

$$(3) \quad \mathbf{r}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u)$$

12. 次の曲面の曲面積を求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

$$(2) \quad \mathbf{r}(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi)$$

13. 次のスカラー場の勾配を求めよ.

$$(1) \quad f(x, y, z) = \frac{e^x}{1 + y^2 + z^2} \quad (2) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(3) \quad f(x, y, z) = x^2 y + x y^2 - z \quad (4) \quad f(x, y, z) = x^2 \sin y \cos z$$

14. 次のベクトル場の流線を求めよ.

$$(1) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = (x, y, 0) \quad (2) \quad \mathbf{v}(x, y, z) = (-y, x, 0)$$

15. 次のベクトル場の発散および回転を計算せよ.

$$(1) \quad \mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2) \quad (2) \quad \mathbf{a} = (-y, x, 0)$$

$$(3) \quad \mathbf{a} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \quad (4) \quad \mathbf{a} = (y^2 z, x z^2, x^2 y)$$