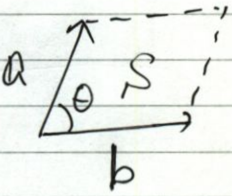
(a) ベクトルの内積.

<u>定義</u>. $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ の内積を

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ で定義する. このとき.

$|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{\frac{1}{2}}$ である.

また次が成り立つ.



としたとき.

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta$.

$S=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\theta$

が成り立つ.

<u>定義</u>. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ のとき. $\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$は直交するといい. $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ とかく.

$|\mathbf{a}|=1$ のとき. $\mathbf{a}$を単位ベクトルという.

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が単位ベクトルで. 直交するとき. 正規直交基底という.

(このとき. $\mathbf{a}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1)\cdot\mathbf{a}_1+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_3)\cdot\mathbf{a}_3$ と表される.)

$\mathbf{e}_1=(1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3=(0, 0, 1)$ を基本ベクトルという.

$\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ に対し. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i=a_i$ より

$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_2+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$ が成立つ.

また. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は正規直交基底であるが. これは右手系とよばれる

(P145参照)

(b) ベクトルの外積

<u>定義</u>. $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積を

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$ で定義する.

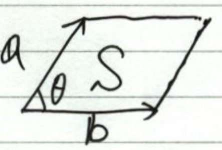
<u>例</u>. $\mathbf{a} = (2, 1, 3)$ と $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$ の外積は.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4, -1, 3)$$ である.

<u>外積の性質</u>. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が平行でないとき. 次が成立.

(1) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$

(2) $S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$



∵ (1) $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$ である.

〃 $-a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$

$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$ も同様.

(2) $S^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot \sin^2\theta = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$ である.

ここで. $|\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$

$= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2$ となる.

ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ と 実数 α に対し 次が成立.

(3) $\mathbb{a}\times\mathbb{b} = -\mathbb{b}\times\mathbb{a}$.

(4) $\mathbb{a}\times(\mathbb{b}+\mathbb{c}) = \mathbb{a}\times\mathbb{b} + \mathbb{a}\times\mathbb{c}$

(5) $\alpha\cdot(\mathbb{a}\times\mathbb{b}) = (\alpha\mathbb{a})\times\mathbb{b} = \mathbb{a}\times(\alpha\mathbb{b})$

∵ (3) $\mathbb{a}\times\mathbb{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(-\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\right)$

$= -\mathbb{b}\times\mathbb{a}$.

(4), (5) は省略.

(6). $\mathbb{a}$ と $\mathbb{b}$ が 1次従属 ($\mathbb{a} = \alpha\cdot\mathbb{b}$) のとき $\mathbb{a}\times\mathbb{b} = 0$. 逆も成り立つ.

∵ $|\mathbb{a}\times\mathbb{b}| = S$ より 求まる.

例題 4.1.2, 問4.1.1 [2], をする.

(C) 三重積.

<u>定義</u> ベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ に対し.

$|\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ を (スカラー) 三重積 という.

$= -\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}$

ここで $|\mathbb{a}\ \mathbb{b}\ \mathbb{c}| = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

$= (\mathbb{a}\times\mathbb{b})\cdot\mathbb{c}$ がわかる.

ここで. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角を φ とする (P148, 図4.5) と.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のつくる平行六面体の体積 T は

$$T = \left| S \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\varphi \right| = \left| |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\varphi \right| = \left| (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \right| = \left| |\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| \right|$$

となる.

三重積の性質.

(1) $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$.

(2). $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{c}| \cdot \cos\varphi$.

(3). $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が1次従属なら $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = 0$.逆も成り立つ.
$(\mathbf{a} = \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c})$

∵ (1)(2)はすでに示した. (3)は $\left||\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|\right| = T$ より求まる.

例. $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$, $\mathbf{c} = (1, 3, 4)$ とするとき.

$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$ を求めよ

答 $|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 12 + 36 - 15 - 18 - 32 = 3$. である

問 2 三重積, 6 をやる.