§4.2.1 曲線と運動.

連続なベクトル関数 $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ の軌跡は.

空間内の曲線 C を定める. これを.

$C: r(t)=(x(t),y(t),z(t))$ と表す.

曲線 C のパラメータ表示 とよぶこともある.

$r(t)$ を運動 ととらえて.

$\dot{r}(t)=\frac{d}{dt}r(t)$ を 速度ベクトル

$\ddot{r}(t)=\frac{d^2}{dt^2}r(t)$ を 加速度ベクトル

$|\dot{r}(t)|$ を速度 という.

また. $\dot{r}(t)$ が連続のとき. $r(t)$ は滑らかといい.

$\dot{r}(t_0)=0$ をみたすとき. $r(t_0)$ を C の特異点、という. さらに.

点 $r(t_0)$ における. 曲線 C の 接線 は.

$p(t)=t\cdot\dot{r}(t_0)+r(t_0)$ で定まる. $\dot{r}(t_0)$ を接線ベクトルともいう.

例. (1). 定ベクトル $p=(p_1,p_2,p_3)$, $q=(q_1,q_2,q_3)$ に対し.

$r(t)=t\cdot p+q$ とすると.

$r(t)$ は点 q を通る p 方向の直線になる.

(2). $r(t)=(a\cos t, a\sin t, bt)$ は 常ら線 とよばれる (P153 図4.6)

(3). $r(t)=(a(t-\sin t), a(1-\cos t), b)$ は サイクロイド とよばれ特異点をもつ (P155 図4.8)

実際 $\dot{r}(t)=(a(1-\cos t), a\sin t, 0)$ より

$t_0=2\pi n$ で $\dot{r}(t_0)=0$ となる.

問 4.2.1. [1]〜[3].

弧長パラメータ表示

$C : r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の. $r(t_0)$ から $r(t)$ までの長さ $S(t)$ は.

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |\dot{r}(\tau)|\, d\tau$$ で与えられる.

曲線Cが特異点をもたなければ.

$\frac{ds}{dt} = |\dot{r}(t)| > 0$ となり.逆関数がある.

$\therefore\ r(s) = r(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$ と

r を s を使って表すことができる.

この表示を弧長パラメータ表示, s を弧長という.

なお $\frac{d}{ds} r(s) = r'(s)$ と表すことにする. ここで

$$r'(s) = \left(\frac{d}{ds} x(t(s)), \frac{d}{ds} y(t(s)), \frac{d}{ds} z(t(s))\right)$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\cdot \dot{x}(t(s)), \frac{dt}{ds}\cdot \dot{y}(t(s)), \frac{dt}{ds}\, \dot{z}(t(s))\right)$$

$$= \frac{dt}{ds}\cdot \dot{r}(t(s))$$ と表せる. さらに

$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\dot{r}(t)|}$ より. $|r'(s)| = 1$ である.

命題 $C : r(s)$ と弧長パラメータ表示したとき. $|r'(s)| = 1$ をみたす.

例題4.2.1 ⟶ 問4.2.1 [4]