線形代数２　例題・演習問題集　その４

1. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
と定めるとき，$\ker f$ の基底と次元を求めよ．

2. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
と定めるとき，$\ker f$ の基底と次元を求めよ．

3. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
と定めるとき，$\ker f$ の基底と次元を求めよ．

4. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
と定めるとき，基底 $v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ．

5. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
と定めるとき，基底 $v_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ．

6. $f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$ を
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ．

7. 次の行列が直交行列であることを示せ．

(1) $$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(3) $$\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4\sqrt{2} \\ 4 & -4 & -3\sqrt{2} \\ 5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 3×3 行列

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c \\ a & b & -c \\ a & 0 & 2c \end{bmatrix}$$

が直交行列となる a, b, c の条件を求めよ．