線形代数2 例題・演習問題集 その1

1. $\mathbb{C}[x]$ の零ベクトルと, $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ の逆ベクトルがなにか答えよ.
2. $x \in V$ (V は線形空間) に対する逆ベクトルがただ一つであることを示せ.
3. 任意の $x \in V$ に対して, $0 \cdot x$ が零ベクトルであることを示せ.
4. 任意の $x \in V$ に対して, $(-1) \cdot x$ が x の逆ベクトルであることを示せ.
5. 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, $\alpha \cdot 0$ が零ベクトルであることを示せ.
6. $\mathbb{C}^3$ において, ベクトル $v = (2, 3, 1)$ が $u = (1, 1, 2)$ と $w = (1, 0, 5)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ. また, 入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
7. $\mathbb{C}^2$ において, ベクトル $v = (1, 4)$ が $u = (2, 3)$ と $w = (3, 1)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ. また, 入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
8. $\mathbb{C}^3$ において, ベクトル $v = (1, 4, -3)$ が $u = (2, 3, 2)$ と $w = (-1, 0, 2)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ. また, 入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
9. $\mathbb{C}^3$ において, ベクトル $v = (1, 2, 3)$ が $u = (2, 1, 5)$ と $w = (1, 0, a)$ によって生成される部分空間に入るための a の条件を求めよ.
10. $\mathbb{C}^3$ において, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ. (ただし, $W = \{0\}$ の場合は $W = \{0\}$ と解答すること. 以下の問題でも同様.)
11. $\mathbb{C}^3$ において, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0\}$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.
12. $\mathbb{C}^3$ において, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = z\}$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.
13. $\mathbb{C}^4$ において, $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid x + y + z + w = 0, x + 2y + z + 2w = 0\}$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.
14. $\mathbb{C}^3$ において, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 1\}$ が部分空間にならないことを示せ.
15. $\mathbb{C}^3$ において, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = z\}$ とするとき, $W_1 \cap W_2$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.
16. $\mathbb{C}^3$ において, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = y = z\}$ とするとき, $W_1 \cap W_2$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.
17. $\mathbb{C}^4$ において, $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid x + 2y - z - 2w = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \mid x = y\}$ とするとき, $W_1 \cap W_2$ を $\langle v, w \rangle$ の形で表せ.