線形代数２　例題・演習問題集　その１

1. $\mathbb{C}^2$ が線形空間であることを示せ.
2. $M(m,n;\mathbb{C})$ が線形空間であることを示せ.
3. $\mathbb{C}[x]$ の零ベクトルと，$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ の逆ベクトルがなにか答えよ.
4. $x\in V$ (V は線形空間) に対する逆ベクトルがただ一つであることを示せ.
5. 任意の $x\in V$ に対して，$0\cdot x$ が零ベクトルであることを示せ.
6. 任意の $x\in V$ に対して，$(-1)\cdot x$ が x の逆ベクトルであることを示せ.
7. 任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，$\alpha\cdot 0$ が零ベクトルであることを示せ.
8. 任意の $x,y\in V$ に対して，$x=y+z$ となるベクトル z がただ一つあることを示せ.
9. 講義中に説明した同一視のもとで，$\mathbb{C}^2$ が $\mathbb{C}^3$ の部分空間になることを示せ.
10. $\mathbb{C}^3$ において，ベクトル $v=(2,3,1)$ が $u=(1,1,2)$ と $w=(1,0,5)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ．また，入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
11. $\mathbb{C}^2$ において，ベクトル $v=(1,4)$ が $u=(2,3)$ と $w=(3,1)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ．また，入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
12. $\mathbb{C}^3$ において，ベクトル $v=(1,4,-3)$ が $u=(2,3,2)$ と $w=(-1,0,2)$ によって生成される部分空間に入っているか調べよ．また，入っている場合は v を u と w の一次結合で表せ.
13. $\mathbb{C}^3$ において，ベクトル $v=(1,2,3)$ が $u=(2,1,5)$ と $w=(1,0,a)$ によって生成される部分空間に入るための a の条件を求めよ.
14. $\mathbb{C}^3$ において，$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,2x-y+3z=0\}$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.（ただし，$W=\{0\}$ の場合は $W=\{0\}$ と解答すること．以下の問題でも同様.）
15. $\mathbb{C}^3$ において，$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x+y+z=0\}$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.
16. $\mathbb{C}^3$ において，$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x=y=z\}$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.
17. $\mathbb{C}^4$ において，$W=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4\,|\,x+y+z+w=0, x+2y+z+2w=0\}$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.
18. $\mathbb{C}^3$ において，$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x+y+z=1\}$ が部分空間にならないことを示せ.
19. $\mathbb{C}^3$ において，$W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,2x+y-z=0\}$，$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x=y=z\}$ とするとき，$W_1\cap W_2$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.
20. $\mathbb{C}^3$ において，$W_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x-2y+3z=0\}$，$W_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3\,|\,x=y=z\}$ とするとき，$W_1\cap W_2$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.
21. $\mathbb{C}^4$ において，$W_1=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4\,|\,x+2y-z-2w=0\}$，$W_2=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4\,|\,x=y\}$ とするとき，$W_1\cap W_2$ を $\langle v,w\rangle$ の形で表せ.