問題3 解答例

1.(1) $av_1+bv_2+cv_3=x$ — ☆ を解くと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 1 \\ & 1 & & \frac{3}{2} \\ 0 & & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \quad \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{3}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \ x=[v_1 \ v_2 \ v_3]\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ ∴成分表示は $\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(2) ☆ を解くと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 3 \\ & 1 & & -\frac{3}{2} \\ 0 & & 1 & -\frac{7}{2} \end{array}\right]$$

$$\therefore \ x=[v_1 \ v_2 \ v_3]\begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

(3) ☆ を解くと

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & -\frac{1}{2} \\ & 1 & & 2 \\ 0 & & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$\therefore x = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$　$\therefore$ 成分表示は $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

2.(1) $\sum_{i=1}^{4} a_i v_i = x$ を解くと.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & \frac{2}{3} \\ & 1 & & & \frac{2}{3} \\ & & 1 & & 1 \\ 0 & & & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$\therefore$ 成分表示は $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

(2) $\sum_{i=1}^{4} a_i v_i = x$ を解くと.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & -\frac{1}{3} \\ & 1 & & & -\frac{17}{6} \\ & & 1 & & -\frac{5}{2} \\ & & & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right] \quad \therefore \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ -17 \\ -15 \\ 14 \end{bmatrix}$$ が成分表示

$\boxed{3}$ $[v_1\ v_2\ v_3] = [u_1\ u_2\ u_3]P$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} P.$$ ここで $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 3 & 1 & & 1 & \\ 1 & 5 & -1 & & & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & \frac{8}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} \\ & 1 & & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \\ & & 1 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$ である

$$\therefore\ P=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}8&-1&-1\\-1&2&2\\3&9&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}6&8&8\\3&-1&-1\\6&-12&18\end{bmatrix}$$ である

成分表示は

$$\frac{1}{30}\begin{bmatrix}6&8&8\\3&-1&-1\\6&-12&18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}44\\2\\-6\end{bmatrix}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}22\\1\\-3\end{bmatrix}$$ である

$\boxed{4}$ $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ の逆行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&&\\0&1&1&&1&\\1&0&1&&&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&&&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&1&&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\&&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$ となる

$$\therefore\ P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3&-1\\1&-1&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}$$

成分表示は $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&3&-1\\1&-1&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-3\\-7\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\-12\\16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\4\end{bmatrix}$ である

5. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列は $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

$\therefore P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ また成分表示は

$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}$ である

6.(1) $y_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2}v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ である

$y_2' = v_2 - \langle y_1, v_2 \rangle y_1 = v_2 - y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\|y_2'\| = \sqrt{2}$ より

$y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$y_3' = v_3 - \langle y_1, v_3 \rangle y_1 - \langle y_2, v_3 \rangle y_2$

$= v_3 - y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\|y_3'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より

$y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である

(2) $y_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{3}v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ である

$y_2' = v_2 - \langle y_1, v_2 \rangle y_1 = v_2 - y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$y_2 = \dfrac{y_2'}{\|y_2'\|} = \dfrac{1}{3}y_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ である.

$y_3' = v_3 - \langle y_1, v_3 \rangle y_1 - \langle y_2, v_3 \rangle y_2 = v_3 - y_1 - y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$y_3 = \dfrac{y_3'}{\|y_3'\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

(3) $y_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

$y_2' = v_2 - \langle y_1, v_2 \rangle y_1 = v_2 - 2\sqrt{3}y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$y_2 = \dfrac{y_2'}{\|y_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. である

$y_3' = v_3 - \langle y_1, v_3 \rangle y_1 - \langle y_2, v_3 \rangle y_2 = v_3 - \dfrac{4}{\sqrt{3}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \dfrac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

$y_3 = \dfrac{y_3'}{\|y_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.