解答その1.

1. $\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して.

I (1) $x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{bmatrix} = y + x$.

(2) $(x+y)+z = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{bmatrix}$

$= x + (y + z)$

(3) $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると. $x + \mathbb{0} = \begin{bmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{bmatrix} = x$.

(4) $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$ とすると. $x + (-x) = \begin{bmatrix} x_1 + (-x_1) \\ x_2 + (-x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{0}$

II (1) $(\alpha+\beta)x = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha x + \beta x$

(2) $\alpha(x+y) = \begin{bmatrix} \alpha(x_1 + y_1) \\ \alpha(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \alpha x + \alpha y$

(3) $(\alpha\beta)x = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta x_2 \end{bmatrix} = \alpha(\beta x)$

(4) $1 \cdot x = 1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x$

2. 1と同様なので省略

3. 零ベクトルは $\mathbb{0} = 0$ であり

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ の逆ベクトルは $-p(x) = -a_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_n x^n$.

4. $-x$ と $-x'$ が逆ベクトルとすると.

$-x = -x + 0 = -x + x + -x' = \mathbb{0} + -x' = -x'$

5. $0 \cdot x = (0+0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ となる. この両辺に $-0 \cdot x$ を足すと、

$\mathbb{0} = \mathbb{0} + 0 \cdot x = 0 \cdot x$ となる

6. $x + (-1) \cdot x = (1-1)x = 0 \cdot x = \mathbb{0}$ $\therefore (-1) \cdot x$ は x の逆ベクトル

7. $\alpha \cdot \mathbb{0} + \alpha \mathbb{0} = \alpha(\mathbb{0} + \mathbb{0}) = \alpha \cdot \mathbb{0}$ となる この両辺に $-\alpha \mathbb{0}$ を足せばよい.

8. $z = x - y$ とすればよい. また z' もこの式をみたすとすると、

$z = -y + y + z = -y + x = -y + y + z' = z'$ となる.

9. $\mathbb{C}^2 \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, $\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ より 成立.

10. $(2.3.1)=\alpha(1.1.2)+\beta(1.0.5)$ とすると.

$$\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \alpha=3\\ 2\alpha+5\beta=1\end{cases} \quad \therefore \begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-1\end{cases} \quad \therefore v=3u-w$$ であり.

$v\in\langle u,w\rangle$.

11. $(1.4)=\alpha(2.3)+\beta(3.1)$ とすると,

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\3&1&4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\0&-\frac{7}{2}&\frac{5}{2}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{5}{7}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{11}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}\end{array}\right]$$ $\therefore v=\frac{11}{7}u-\frac{5}{7}w$ であり. $v\in\langle u,w\rangle$

12. $(1.4.-3)=\alpha(2.3.2)+\beta(-1.0.2)$ とすると.

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&-1&1\\3&0&4\\2&2&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&\frac{4}{3}\\0&3&-4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{4}{3}\\0&1&-\frac{4}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{4}{3}\\0&1&-\frac{4}{3}\\0&0&-\frac{3}{2}\end{array}\right]$$ ∴ 解なしなので, $v\notin\langle u,w\rangle$ である.

13. $(1.2.3)=\alpha(2.1.5)+\beta(1.0.a)$ とすると,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & a & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7+3a \end{array}\right] \quad \therefore a = \frac{7}{3}$$

14. $2x - y + 3z = 0$ を解くと 係数行列 $A = [2\ -1\ 3]$ は

$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,[2\ -1\ 3] = 1$ なので、解の自由度は 2.

$\therefore x = \alpha,\ z = \beta$ とおけば、$y = 2\alpha + 3\beta$ で

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 3\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる.

$$\therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

15. $x + y + z = 0$ を解くと. $\mathrm{rank}\,[1\ 1\ 1] = 1$ より

$x = \alpha,\ y = \beta$ として. $z = -\alpha - \beta$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

16. $x=y=z$ を解くと 係数行列は $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ より

1つの式にみえるが、実は $x=y$ と $y=z$ という2つの式である。

$\mathrm{rank}\,A=2$. $\therefore$ $x=\alpha$ とすれば、$x=y=z=\alpha$.

$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\quad\therefore W=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$

17. $\begin{cases}x+y+z+w=0\\ x+2y+z+2w=0\end{cases}$ を解くと、係数行列は

$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ より、$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=2$.

$\therefore$ 自由度 2. $x=\alpha$, $y=\beta$ とすると、$z=-\alpha$, $w=-\beta$.

$\therefore \begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\-\alpha\\-\beta\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$ $\quad\therefore W=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$

18. $W\ni(1,0,0),(0,1,0)$ であるが、

$(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin W$

$\therefore$ 部分空間ではない

19. $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ 2x+y-z=0,\ x=y=z \right\}$ である.

これを解くと. 係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ は

$\operatorname{rank} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$. $\therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

20. $x-2y+3z=0$, $x=y=z$ を解くと. $x=k$ とおいて.

$k-2k+3k=0$ $\therefore k=0$ $\therefore x=y=z=0$. $\therefore W=\{0\}$.

21. $\begin{cases} x+2y-z-2w=0 \\ x=y \end{cases}$ を解くと $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に対し.

$\operatorname{rank} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$ $\therefore x=\alpha$, $w=\beta$ とおけば

$y=\alpha$. $z=3\alpha-2\beta$ よって

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha-2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$