

解答 2.1

1. 零ベクトルは $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であり

$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ の逆ベクトルは

$$-p(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n \text{ である}$$

2. $-x$ と $-x'$ が逆ベクトルとすると

$$-x = -x + \mathbf{0} = -x + x + (-x)' = \mathbf{0} + (-x)' = -x'$$

3. $\mathbf{0} \cdot x = (\mathbf{0} + \mathbf{0})x = \mathbf{0} \cdot x + \mathbf{0} \cdot x$ となる. この両辺に $-\mathbf{0} \cdot x$ を足すと

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0} \cdot x \quad \text{となる}$$

4. $x + (-1) \cdot x = (1-1)x = \mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0} \quad \therefore (-1) \cdot x$ は x の逆ベクトル

5. $\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0}$ となる. この両辺に $-\alpha \cdot \mathbf{0}$ を足せば

$$\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) \quad \text{より } \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{となる}$$

6. $(2, 3, 1) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(1, 0, 5)$ とすると

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha = 3 \\ 2\alpha + 5\beta = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases} \quad \therefore v = 3u - w \text{ であり.}$$

$$v \in \langle u, w \rangle$$

7. $(1, 4) = \alpha(2, 3) + \beta(3, 1)$ と仮定.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & | & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & | & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \quad \therefore v = \frac{11}{7}u - \frac{5}{7}w \text{ である. } v \in \langle u, w \rangle$$

8. $(1, 4, -3) = \alpha(2, 3, 2) + \beta(-1, 0, 2)$ と仮定.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & 0 & | & 4 \\ 2 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 3 & | & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & | & -\frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & | & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad \therefore \text{解なしなので, } v \notin \langle u, w \rangle \text{ である.}$$

9. $(1, 2, 3) = \alpha(2, 1, 5) + \beta(1, 0, a)$ と仮定.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & | & 2 \\ 5 & a & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & | & -7+3a \end{bmatrix} \quad \therefore a = \frac{7}{3}$$

10. $2x - y + 3z = 0$ を解くと 係数行列 $A = [2 \ -1 \ 3]$ は

$\text{rank } A = \text{rank } [2 \ -1 \ 3] = 1$ なので、解の自由度は 2.

$\therefore x = \alpha, z = \beta$ とおけば、 $y = 2\alpha + 3\beta$ で

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha + 3\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{となる}$$

$$\therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

11. $x + y + z = 0$ を解くと $\text{rank } [1 \ 1 \ 1] = 1$ より

$x = \alpha, y = \beta$ とし、 $z = -\alpha - \beta$.

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha - \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

12. $x=y=z$ を解くと 係数行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ より

↑ 1つの式に見えるが、実は $x=y$ と $y=z$ という2つの式である。

$\text{rank } A = 2$. $\therefore x=\alpha$ とすれば $x=y=z=\alpha$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

13. $\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \end{cases}$ を解くと 係数行列は

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ より $\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$.

$\therefore$ 自由度 2. $x=\alpha$, $y=\beta$ とすると $z=-\alpha$, $w=-\beta$.

$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

14. $W \ni (1,0,0), (0,1,0)$ であるが、

$(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin W$

$\therefore$ 部分空間ではない

15. $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid 2x + y - z = 0, x = y = z \right\}$ である.

これを解くと係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ は

$$\text{rank } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

16. $x - 2y + 3z = 0, x = y = z$ を解くと $x = k$ とおいて

$$k - 2k + 3k = 0 \quad \therefore k = 0 \quad \therefore x = y = z = 0. \quad \therefore W = \{0\}.$$

17. $\begin{cases} x + 2y - z - 2w = 0 \\ x = y \end{cases}$ を解くと $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$\text{rank } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \quad \therefore x = \alpha, w = \beta \text{ とおける}$$

$$y = \alpha, z = 3\alpha - 2\beta \quad \text{よって}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha - 2\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$