

§1.2 部分空間

定義 1.3. V の空でない部分集合 W が次の (1), (2) をみたすとき.

W を V の (線形)部分空間 という.

$\forall x, y \in W, \alpha \in \mathbb{C}$ に対し.

(1) $x + y \in W$ (2) $\alpha x \in W$.

命題 1.4. V の零ベクトル $\mathbf{0}$ は W に入っている.

⊙ $x \in W$ に対し. $\mathbf{0} = 0 \cdot x \in W$ //

例 (1) $\mathbb{C}^n$ の部分空間 W を

$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{C} \right\}$ とすると, W は $\mathbb{C}^n$ の部分空間になる.

(2) $W = \{\mathbf{0}\}$ は V の部分空間.

定義 1.5. $v_1, \dots, v_n \in V$ と $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ で作られるベクトル

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \text{ を}$$

$v_1, \dots, v_n$ の 1次結合 という.

また、この1次結合全体

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} \right\} \text{ を}$$

$v_1, \dots, v_n$ で **生成される(張られる)部分空間** という

例(3) この $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ は V の部分空間である

$$\textcircled{1} \quad \forall \sum \alpha_i v_i, \sum \beta_i v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle, \gamma \in \mathbb{C} \text{ に対し.}$$

$$\sum \alpha_i v_i + \sum \beta_i v_i = \sum (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

$$\gamma \cdot \sum \alpha_i v_i = \sum (\gamma \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \quad //$$

例題 6, 問 7 ~ 9

$$\text{例(4)} \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid 2x - y + 3z = 0 \right\} \text{ は } \mathbb{C}^3 \text{ の部分空間.}$$

$\textcircled{1}$ 条件式 $2x - y + 3z = 0$ を方程式だと思って解くと.

係数行列 $A = [2 \ -1 \ 3]$ は $\text{rank } A = 1$ なので.

解の自由度は $3 - 1 = 2$ となる.

$\therefore x = \alpha, z = \beta$ とおけば. $y = 2x + 3z = 2\alpha + 3\beta$.

$$\therefore \text{解は } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha+3\beta \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{となる.}$$

$$\therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{となるので、部分空間になる} \quad //$$

問 11 ~ 14

命題 1.6. W_1, W_2 を V の部分空間とすると.

$$W_1 \cap W_2 = \{x \in V \mid x \in W_1, x \in W_2\} \quad \text{も部分空間になる.}$$

$$\textcircled{!} \quad ① \in W_1, ① \in W_2 \quad \text{よ) } ① \in W_1 \cap W_2.$$

$$\text{また } \forall x, y \in W_1 \cap W_2, \alpha \in \mathbb{C} \quad \text{に対し.}$$

$$x \in W_1, y \in W_1 \quad \text{よ) } x+y \in W_1 \quad \text{かつ } \alpha x \in W_1$$

$$x \in W_2, y \in W_2 \quad \text{よ) } x+y \in W_2 \quad \text{かつ } \alpha x \in W_2$$

$$\therefore x+y, \alpha x \in W_1 \cap W_2$$

$$\therefore W_1 \cap W_2 \text{ は部分空間である.} //$$

定義 1.7 W_1, W_2 を V の部分空間 とするとき.

$$W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\} \quad \text{は}$$

V の部分空間 となる. これを W_1 と W_2 の **和空間** という.

とくに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき, これを **直和** といい, $W_1 \oplus W_2$ とかく.

例題 15, 問 16, 17