§3.2. エルミート行列の対角化

命題 3.10. エルミート行列の固有値は全て実数.

∵ $Au = \lambda u$ とすると.

$(Au, u) = (\lambda u, u) = \bar{\lambda}(u, u)$

$\quad \|$

$(u, Au) = (u, \lambda u) = \lambda(u, u) \qquad \therefore \lambda = \bar{\lambda}$ //

命題 3.11.

エルミート行列の異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する.

∵ $Au = \lambda u, \ Av = \mu v \quad (\lambda \neq \mu)$ とすると.

$\lambda(v, u) = (v, \lambda u) = (v, Au) = (Av, u)$

$= (\mu v, u) = \mu(v, u)$

↑ 実数なので

$\lambda \neq \mu$ より $(u, v) = 0$ //

定理 3.12 エルミート行列(対称行列)は.

ユニタリ行列(直交行列)で対角化できる.

補題3.13 A, B を $n\times n$ 行列とし．

$A=[a_1 \cdots a_n]$，$B=[b_1 \cdots b_n]$ と表されるとすると．

$$A^*B=\begin{bmatrix}(a_1,b_1) & \cdots & (a_1,b_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n,b_1) & \cdots & (a_n,b_n)\end{bmatrix}$$ である．

∵ $A^*B=\begin{bmatrix}\overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}}\\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1i}} & \cdots & \overline{a_{ni}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$ よりこの (i,j) 成分は

$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}}\, b_{kj} = (a_i, b_j)$ となっている //.

定理3.12の証明

n についての帰納法でやる．

$n=1$ のとき．1×1 エルミート行列 A は $A=[a]$ と表せる．

∴ $P=[1]$ とすれば．直交行列で $P^{-1}AP=[a]$ となる

次に $n-1$ まで成り立つと仮定し．n のときを考える

λ_1をAの固有値．p_1を$\|p_1\|=1$をみたすλ_1の固有ベクトルとする．

グラム・シュミットの直交化法から．$p_1, \cdots, p_n$が正規直交基底になるように

$p_2, \cdots, p_n$がとれる．

ここで　$P=[p_1 \cdots p_n]$とすると．これはユニタリ行列（定理2.10）

$\therefore P^* = P^{-1}$が成り立つ

今．$(p_i, Ap_1) = (p_i, \lambda p_1) = \lambda_1 (p_i, p_1) = \begin{cases} \lambda_1 & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$ より

$$P^{-1}AP = P^* [Ap_1 \cdots Ap_n]$$

$$= \begin{bmatrix} (p_1, Ap_1) & \cdots & (p_1, Ap_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_n, Ap_1) & \cdots & (p_n, Ap_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & (p_1, Ap_2) & \cdots & (p_1, Ap_n) \\ 0 & (p_2, Ap_2) & \cdots & (p_2, Ap_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (p_n, Ap_2) & \cdots & (p_n, Ap_n) \end{bmatrix}$$

Bとする

となるが．

$\overline{(p_i, Ap_j)} = (Ap_j, p_i) = (p_j, Ap_i)$　より　Bはエルミート

また$(p_1, Ap_i) = 0$　$(i \geq 2)$

∴ 帰納法の仮定から B はユニタリ行列 Q で対角化できる.

さらに $R = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right]$ とすれば.

$$R^*P^*APR = R^* \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] R = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & R^*BR \end{array}\right]$$

と対角化できる //