

§3 行列の対角化

例. $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{と可る.}$$

$f: \mathbb{C}_{\{e_1, e_2\}}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\{e_1, e_2\}}^2$ の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ である.

ここで、基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対し.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3u_1 = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1, u_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{より.}$$

$f: \mathbb{C}_{\{u_i\}}^2 \rightarrow \mathbb{C}_{\{u_i\}}^2$ の表現行列は $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ になる.

今、 $\{e_i\}$ から $\{u_i\}$ への基底の変換行列を P と可ると.

$$f: \mathbb{C}_{\{u_i\}}^2 \xrightarrow{B} \mathbb{C}_{\{u_i\}}^2 \quad \text{より} \quad A = P B P^{-1}$$

$$P \downarrow \quad \quad \quad \downarrow P$$

$$\mathbb{C}_{\{e_i\}}^2 \xrightarrow{A} \mathbb{C}_{\{e_i\}}^2$$

$$B = P^{-1} A P \quad \text{となる.}$$

定義 3.1. $n \times n$ 行列 B に対し. B の (i, i) 成分 (λ_i) 以外

全て 0 である行列を **対角行列** という

$n \times n$ 行列 A に対し. 対角行列 B と正則行列 P が存在して

$B = P^{-1}AP$ とできるとき. A を **対角化可能** という.

また. $B = P^{-1}AP$ と表すことを. A の **対角化** という

→ 対角化には. $f(u) = \lambda u$ となる λ と u が重要.

定義 3.2. $n \times n$ 行列 A に対し. $(\lambda E - A)u = 0$ と表せる

$$Au = \lambda u \quad \leftarrow (\lambda \in \mathbb{C}, u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0)$$

をみたす λ を A の **固有値**,

u を **固有値 λ に属する A の固有ベクトル** という.

また. 固有ベクトルと 0 からなる部分空間

$$V(\lambda) = \{u \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda E - A)u = 0\} \text{ を}$$

固有値 λ に属する固有空間 という.

さて、 $Au = \lambda u$ となる λ と u が存在する条件を考えよう。

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow (\lambda E - A)u = 0 \text{ かつ}$$

これをみたす自明でない u が存在する条件は

$$|\lambda E - A| = 0 \text{ である (連立方程式の性質から)}$$

$$\therefore \lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0 \text{ である}$$

定義 3.3 t を変数とする関数

$$\varphi_A(t) = |tE - A| \text{ を } A \text{ の固有多項式} \text{ といふ}$$

$$\varphi_A(t) = 0 \text{ を } A \text{ の固有方程式} \text{ といふ}$$

また、 $\varphi_A(t) = 0$ の解 λ の重複度を固有値 λ の重複度といふ。

定理 3.4

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow \varphi_A(\lambda) = 0$$

また、固有値は重複度をこめて n 個ある。

注 n 次方程式には、重複度をこめて n 個解がある。

例Ⅳ(1) 問Ⅳ(2)~(5)

定理 3.5 A を $n \times n$ 行列, P は正則行列 とすると次が成立.

$$(1) \varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$$

(2) A と $P^{-1}AP$ の固有値は重複度もこめて等しい.

(3) λ が A の固有値なら.

$$\dim V(\lambda) = n - \text{rank}(\lambda E - A)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (1) \varphi_{P^{-1}AP}(t) &= |tE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE - A)P| \\ &= |P|^{-1} |tE - A| |P| = |tE - A| = \varphi_A(t) \end{aligned}$$

(2) (1) より明らか.

$$\begin{aligned} (3) \dim V(\lambda) &= \dim \{ u \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda E - A)u = 0 \} \\ &= \dim \ker(\lambda E - A) = \dim \mathbb{C}^n - \dim \text{Im}(\lambda E - A) \\ &= n - \text{rank}(\lambda E - A) \end{aligned}$$

定理 3.6 A を $n \times n$ 行列 とすると、次が成立

(1) A の異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立.

(2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ が A の固有値なら $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\}$

(3) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が A の異なる固有値なら $\dim V(\lambda_i) = 1$.

☺ (1) $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ を異なる固有値, u_1, \dots, u_{k+1} をその固有ベクトル
とすると

$k=1$ のとき, u_1 は 1 次独立.

u_1, \dots, u_k が 1 次独立と仮定し, u_1, \dots, u_{k+1} が 1 次独立を示す.

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i u_i = 0 \quad \text{とすると}$$

もし $\alpha_{k+1} \neq 0$ とすると

$$u_{k+1} = -\sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha_{k+1}} u_i = \sum_{i=1}^k \beta_i u_i \quad \text{となるが、これは}$$

$$\lambda_{k+1} u_{k+1} = \sum \lambda_{k+1} \beta_i u_i$$

$$\overset{\parallel}{=} A u_{k+1} = A \left(\sum \beta_i u_i \right) = \sum \beta_i A u_i = \sum \lambda_i \beta_i u_i \quad \text{となる}$$

$$\therefore \sum (\lambda_{k+1} - \lambda_i) \beta_i u_i = 0 \quad \text{となる}$$

u_1, \dots, u_k の 1 次独立性から. $(\lambda_{k+1} - \lambda_i) \beta_i = 0$ だが,

$\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) 故に $\beta_i = 0 \quad \therefore u_{k+1} = 0$ となり矛盾

$\therefore \alpha_{k+1} = 0$.

このとき $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0$ 故に $\alpha_i = 0$ ($\forall i$) \therefore 1 次独立 //

(2) $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) \ni u$ と仮定.

$$\begin{aligned} Au &= \lambda_1 u & \therefore (\lambda_1 - \lambda_2)u &= 0 & \therefore u &= 0 \\ &= \lambda_2 u & \therefore V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) &= \{0\}. \end{aligned}$$

(3) まず $\dim V(\lambda_i) \geq 1$ である. さらに.

$$n = \dim \mathbb{C}^n \geq \dim (V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_n))$$

$$= \dim V(\lambda_1) + \dots + \dim V(\lambda_n) \quad \text{となる}$$

$$\therefore \dim V(\lambda_i) = 1. \quad //$$

定理 3.7 λ を A の固有値, k をその重複度とすると.

$$\dim V(\lambda) \leq k \text{ である}$$

⊖ $\dim V(\lambda) \geq k+1$ とする.

$u_1, \dots, u_{k+1} \in V(\lambda)$ を 1 次独立とし. ここに

$u_{k+2}, \dots, u_n \in \mathbb{C}^n$ を付け足して u_1, \dots, u_n が 1 次独立になるようにできる
(定理 1.18)

ここで $P = [u_1 \ \dots \ u_n]$ は正則行列で (系 1.11 (2))

$$\varphi_A(t) \cdot |P| = |tE - A| \cdot |P| = |tP - AP|.$$

$$= |[tu_1 \ \dots \ tu_n] - [Au_1 \ \dots \ Au_n]|$$

$$= |[(tE - A)u_1 \ \dots \ (tE - A)u_n]|$$

$$= |[(t - \lambda)u_1 \ \dots \ (t - \lambda)u_{k+1} \ (tE - A)u_{k+2} \ \dots \ (tE - A)u_n]|$$

$$= (t - \lambda)^{k+1} \cdot |[u_1 \ \dots \ u_{k+1} \ (tE - A)u_{k+2} \ \dots \ (tE - A)u_n]|$$

$\therefore \lambda$ の重複度は $k+1$ 以上となり矛盾 //

