

§2.3 直交変換と対称変換

定義2.8: $n \times n$ 実行列 A は

${}^tAA = E_n$ をみたすとき **直交行列**,

$A = {}^tA$ をみたすとき **対称行列** という。

また、 $n \times n$ 行列 A に対し、 $A^* = \overline{{}^tA}$ とするとき、

$A^*A = E_n$ をみたすとき **ユニタリ行列**

$A = A^*$ をみたすとき **エルミート行列** という。

補題2.9 $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{である}$$

$$\textcircled{!} (Ax, y) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \overline{y_1 a_{11} x_1} + \cdots + \overline{y_1 a_{1n} x_n} = \sum_{i,j} \overline{y_i a_{ij} x_j} \quad \text{である.} \\
 &+ \quad \vdots \\
 &+ \overline{y_n a_{n1} x_1} + \cdots + \overline{y_n a_{nn} x_n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{同様に. } (x, A^* y) &= \overline{(A^* y, x)} = \sum_{i,j} \overline{x_i (A^*)_{ij} y_j} \\
 &= \sum \overline{x_i} \overline{(A^*)_{ij} y_j} = \sum \overline{x_i} \overline{a_{ji}} y_j \quad \text{である.}
 \end{aligned}$$

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \text{ が成り立つ.}$$

定理 2.10 次は同値

(1) A はユニタリ行列.

(2) $\forall x \in \mathbb{C}^n$ に $\forall L \quad \|Ax\| = \|x\|$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に $\forall L \quad (Ax, Ay) = (x, y)$

(4) $A = [a_1, \dots, a_n]$ と表すと a_1, \dots, a_n は \mathbb{C}^n の正規直交基底

∴ (1) \Rightarrow (2)

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (x, A^* Ax) = (x, x) = \|x\|^2.$$

(2) \Rightarrow (3).

$$\begin{aligned}
 (x+y, x+y) &= (x, x+y) + (y, x+y) \quad \overline{(x, y)} \\
 &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\
 &= (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y)
 \end{aligned}$$

$$(A(x+y), A(x+y)) = (Ax, Ax) + 2\operatorname{Re}(Ax, Ay) + (Ay, Ay).$$

$$\therefore \operatorname{Re}(x, y) = \operatorname{Re}(Ax, Ay) \quad \text{すなわち}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(x, y) &= \operatorname{Re} -i(x, y) = \operatorname{Re}(x, -iy) = \operatorname{Re}(Ax, -iAy) \\
 &= \operatorname{Re} -i(Ax, Ay) = \operatorname{Im}(Ax, Ay).
 \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (4).

$$Ae_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = e_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} = a_i. \quad - *$$

$$\therefore (a_i, a_j) = (Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$$

$$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{よ) わかる} //$$

(4) \Rightarrow (1).

$$A^*A = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1j}} & \cdots & \overline{a_{nj}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1i}} & \cdots & \overline{a_{ni}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{よ) この } (j, i) \text{ 成分は}$$

$$\overline{a_{1j}} a_{1i} + \cdots + \overline{a_{nj}} a_{ni} = \sum_{k=1}^n \overline{a_{kj}} \cdot a_{ki} = (a_j, a_i)$$

$$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \therefore A^*A = E_n \quad \checkmark$$

定理 2.11 次は同値.

(1) A はエルミート

(2) $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ に対 $(Ax, y) = (x, Ay)$.

① (1) \Rightarrow (2). \swarrow 補題 2.9

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, Ay)$$

(2) \Rightarrow (1)

$$\swarrow \star \quad (+)$$

$$(Ae_i, e_j) = (a_i, e_j) = \overline{a_{ji}} \quad \text{である一方}$$

$$\overline{(e_i, Ae_j)} = \overline{(Ae_j, e_i)} = \overline{a_{ij}} = a_{ij}$$

↑
(+)

$$\therefore a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \therefore A^* = A \quad \parallel$$

定義 2.12. $f: V \rightarrow V$ と可3.

(1) $\forall x, y \in V$ に対し $(f(x), f(y)) = (x, y)$ を満たす f を

ユニタリ変換 という.

(2) $(f(x), y) = (x, f(y))$ を満たすとき, f を 対称変換 という.

例 17(1). 問題 17(2). (3) 18