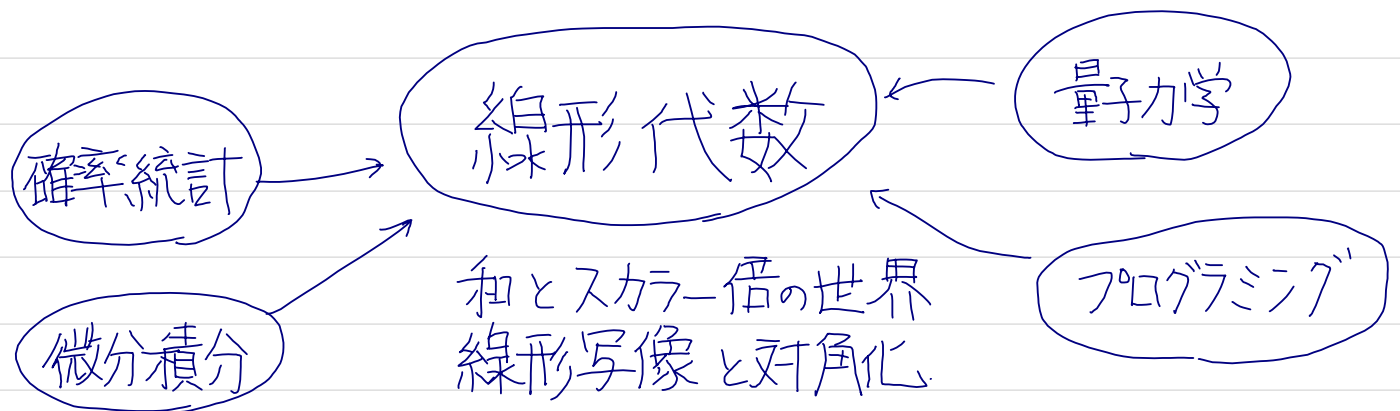


§1 線形空間



定義 1.1. 空でない集合 V に、次の (I), (II) をみたす和と、

スカラー倍 (定数倍) が与えられているとき、 V を **線形空間**、

ベクトル空間 といい、 V の元を **ベクトル** という。また、 x が V の元

であることを、 $x \in V$ と表す。

(I) $\forall x, y, z \in V$ に対し、次が成り立つ

"任意の" という記号、これで V の元を選ばずに 3 つもってくる。
という意味になる。"全ての" ともいい換えられる。

$$(1) x + y = y + x$$

$$(2) (x + y) + z = x + (y + z)$$

(3) ベクトル $\mathbf{0} \in V$ で $\forall x \in V$ に対し、

$x + \mathbf{0} = x$ となるものが存在する。

このベクトル $\mathbf{0}$ (単に 0 と書く) を **零ベクトル** という。

(4) $\forall x \in V$ に対し.

$x + (-x) = \mathbf{0}$ となるベクトル $-x \in V$ が存在する

これを x の **逆ベクトル** という。

(II) $\forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し. 次が成り立つ。

$$(1) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (2) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(3) (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (4) 1 \cdot x = x$$

注1) (I), (II) の条件は普通に計算してよいことを表している

注2) スカラーとして \mathbb{R} を使うときは **実線形空間**

\mathbb{C} を使うときは **複素線形空間** という。

この講義では \mathbb{C} を使い、複素は省略してかかないこととする。

以下、 V は線形空間とする

例(1) n 項ベクトルの集合

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{array}{c|c} \textcircled{1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \textcircled{2} x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \text{ は}$$

①の形のもので、②の条件をみたすものを全て集めた集合

↑
ベクトルや行列のかわりとして $[]$ を使うが、 $()$ でもかまわない。

ベクトルの和とスカラー倍により線形空間になる。

このとき、 $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ が零ベクトルで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ である。

(I) (1)だけ示してみると、 $\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ に対し。

$$x+y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+x_1 \\ \vdots \\ y_n+x_n \end{bmatrix} = y+x \text{ より成り立つ。}$$

他の性質は省略

(2) (m, n) 行列全体

$$M(m, n; \mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & a_{ij} \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array} \end{array} \right\} \text{ は}$$

行列の和とスカラー倍により線形空間になる。

このとき、零ベクトルは $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ であり。

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ の逆ベクトルは、 $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix}$ である。

(3) \mathbb{C} を係数にもつ多項式全体

$\mathbb{C}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ は。

多項式の和とスカラー倍により線形空間になる。

命題 1.2. V に対し、以下が成り立つ。

(1) $\mathbf{0}$ ベクトルはただ1つ。

(2) $x \in V$ の逆ベクトルはただ1つ。

(3) $\forall x, y \in V$ に対し、 $x = y + z$ となる $z \in V$ がただ1つ存在する。

(4) $0 \cdot x = \mathbf{0}$, $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $(-1) \cdot x = -x$.

☺ (1) のみ示す。 $\mathbf{0}$ と $\mathbf{0}'$ を V の零ベクトルとすると

$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$ \therefore 零ベクトルは1つだけ。

問. ③~⑧, ⑩, ⑫ を解け.

注) 解答は別に作製してあるので参考にする事.