問題 4.3.1

1.

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ なので

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}2x$$

$$=\frac{x}{r}$$

などから

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を得る.

問1の合成関数の微分 (4.24) を, $g(\boldsymbol{r})=r$ として応用すると,

$$\nabla f(r)=\frac{df}{dr}\nabla r$$

となることを用いるとよい.

(1) $\nabla r^n=\dfrac{d}{dr}r^n\,\nabla r=nr^{n-1}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}$

(2) $\nabla\left(\dfrac{e^r}{r}\right)=\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{e^r}{r}\right)\nabla r=\dfrac{e^r r-e^r}{r^2}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{e^r(r-1)}{r^3}\boldsymbol{r}$

(3) $\nabla\log r=\dfrac{d}{dr}(\log r)\nabla r=\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$

問題4.3.1

2

(1) $f(x,y,z) = \dfrac{e^x}{1+y^2+z^2}$ について

$$\nabla f = \left(\frac{e^x}{1+y^2+z^2},\ \frac{-2y e^x}{(1+y^2+z^2)^2},\ \frac{-2z e^x}{(1+y^2+z^2)^2} \right)$$

$$= \frac{e^x}{(1+y^2+z^2)^2} \left(1+y^2+z^2,\ -2y,\ -2z \right)$$

(2) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ について,

$$\nabla f = (2x,\ 2y,\ 2z) = 2\boldsymbol{r}$$

(3) $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 - z$ について

$$\nabla f = (2xy+y^2,\ x^2+2xy,\ -1)$$

(4) $f(x,y,z) = x^2 \sin y \cos z$ について

$$\nabla f = (2x \sin y \cos z,\ x^2 \cos y \cos z,\ -x^2 \sin y \sin z)$$