問題4.2.2

2

合成関数の微分より

$$\boldsymbol{r}'(s) = \frac{d}{ds}\boldsymbol{r}(t(s)) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

ここで，$\dot{\boldsymbol{r}} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ であり，逆関数の微分より

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

なので

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{r}' = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\right) = \frac{\left(\frac{d}{ds}\dot{\boldsymbol{r}}(t(s))\right)|\dot{\boldsymbol{r}}| - \dot{\boldsymbol{r}}\,\frac{d}{ds}|\dot{\boldsymbol{r}}(t(s))|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}$$

ここで，

$$\frac{d}{ds}\dot{\boldsymbol{r}}(t(s)) = \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

$$\therefore\ \frac{d}{ds}|\dot{\boldsymbol{r}}(t(s))| = \frac{d}{ds}\left(|\dot{\boldsymbol{r}}(t(s))|^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\right)^{-1/2}\cdot 2\left(\frac{d}{ds}\dot{\boldsymbol{r}}(t(s))\right)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{r}'' = \frac{\ddot{\boldsymbol{r}} - \frac{(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\ddot{\boldsymbol{r}} - (\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}$$

$$= \frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} - \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}$$

$$\therefore\ \kappa(t) = |\boldsymbol{r}''| = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\left(|\dot{\boldsymbol{r}}|^4|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 - 2|\dot{\boldsymbol{r}}|^2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}\left(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 - (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2\right)^{1/2} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{r}''}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} - \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|\kappa}\dot{\boldsymbol{r}} \times \left(\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} - \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\right)$$

$$= \frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3\kappa} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{r}}|}$$

$$\frac{d}{dt}|\dot{\boldsymbol{r}}|^4 = \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2$$
$$= 2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})$$
$$= 4|\dot{\boldsymbol{r}}|^2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})$$

また、

$$\boldsymbol{r}''' = \frac{d}{ds}\left(\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2} - \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}\right)\cdot\frac{dt}{ds} - \frac{d}{dt}\left(\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\right)\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\dddot{\boldsymbol{r}} - 2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4}\cdot\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$
$$- \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^4\left\{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2\dot{\boldsymbol{r}} + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dddot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}} + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}}\right\} - 4|\dot{\boldsymbol{r}}|^2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^8}\cdot\frac{1}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$$

$$= \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\dddot{\boldsymbol{r}} - 2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^5} - \frac{\left\{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2\left(|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dddot{\boldsymbol{r}})\right) - 4(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2\right\}\dot{\boldsymbol{r}} + |\dot{\boldsymbol{r}}|^2(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^7}$$

$$= \left(-\frac{|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 + (\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^5} + \frac{4(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})^2}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^7}\right)\dot{\boldsymbol{r}}$$
$$- \frac{3(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^5}\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{\dddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}$$

$$\therefore |\boldsymbol{r}'\ \boldsymbol{r}''\ \boldsymbol{r}'''| = (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}'')\cdot\boldsymbol{r}'''$$
$$= \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}\times\frac{\ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2}\right)\cdot\boldsymbol{r}'''$$

ここで，

$$(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\cdot\ddot{\mathbf{r}} = |\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}| = 0$$

などに注意すると

$$|\mathbf{r}'\ \mathbf{r}''\ \mathbf{r}'''| = \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}\times\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^2}\right)\cdot\frac{\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$$

$$= \frac{(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\cdot\dddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^6} = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^6}$$

$$\therefore\ \tau = \frac{1}{\kappa^2}|\mathbf{r}'\ \mathbf{r}''\ \mathbf{r}'''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^6}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}\cdot\frac{|\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^6}$$

$$= \frac{|\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2}$$

(1) $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, b\sin t, 0)$ を微分すると

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (-a\cos t, -b\sin t, 0)$$

$$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (a\sin t, -b\cos t, 0) = -\dot{\mathbf{r}}(t)$$

$$\therefore\ |\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

$$\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = (a^2-b^2)\sin t\cos t$$

$$\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}} = (0, 0, ab) \qquad \therefore\ |\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}| = ab$$

$$|\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ -\dot{\mathbf{r}}| = 0$$

以上から， $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \dfrac{(-a\sin t, b\cos t, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$

$$\kappa = ab\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{-3/2}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} - \frac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^4}\right)$$

$$= \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}\left(\frac{(-a\cos t, -b\sin t, 0)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)} - \frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t(-a\sin t, b\cos t, 0)}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{ab\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\Big\{(-a^3\sin^2 t\cos t - ab^2\cos^3 t, -a^2 b\sin^3 t - b^3\sin t\cos^2 t, 0)$$

$$- (-a^3\sin^2 t\cos t + ab^2\sin^2 t\cos t, a^2 b\sin t\cos^2 t - b^3\sin t\cos^2 t, 0)\Big\}$$

$$= \frac{1}{ab\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}\left(-ab^2\cos t(\cos^2 t + \sin^2 t), -a^2 b\sin t(\sin^2 t + \cos^2 t), 0\right)$$

$$= \frac{(-b\cos t, -a\sin t, 0)}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|} = \frac{(0,0,ab)}{ab} = (0,0,1)$$

$$\tau = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|^2} = 0$$

(2) $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ を微分すると、

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\cosh t, \sinh t, 0)$$

$$\dddot{\mathbf{r}}(t) = (\sinh t, \cosh t, 0)$$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{1 + \cosh 2t}$$

$$(\cosh t)' = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

$$(\sinh t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

ここで,

$$\sinh^2 t + \cosh^2 t = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}$$

$$= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh 2t$$

を用いた.

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \sinh t \cosh t + \cosh t \sinh t = 2 \sinh t \cosh t$$

$$= 2 \left(\frac{e^{t} - e^{-t}}{2} \right) \left(\frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \right)$$

$$= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh 2t$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \left(\begin{vmatrix} \cosh t & 1 \\ \sinh t & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & \sinh t \\ 0 & \cosh t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(-\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t - \cosh^2 t \right)$$

$$= \left(-\sinh t, \cosh t, -1 \right)$$

ここで,

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1$$

となることを用いた.

$$\left| \dot{\mathbf{r}} \; \ddot{\mathbf{r}} \; \dddot{\mathbf{r}} \right| = \left(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot \dddot{\mathbf{r}} = -\sinh^2 t + \cosh^2 t = 1.$$

以上から, $\mathbf{e}_1 = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{(\sinh t, \cosh t, 1)}{\sqrt{1 + \cosh 2t}}$

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} = \frac{\sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1}}{(1 + \cosh 2t)^{3/2}} = \frac{1}{1 + \cosh 2t}$$

$$\mathbb{e}_2 = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{\ddot{\mathbb{r}}}{|\dot{\mathbb{r}}|^2} - \frac{(\dot{\mathbb{r}}\cdot\ddot{\mathbb{r}})\dot{\mathbb{r}}}{|\dot{\mathbb{r}}|^4}\right)$$

$$= (1+\cosh 2t)\left(\frac{(\cosh t, \sinh t, 0)}{1+\cosh 2t} - \frac{\sinh 2t\,(\sinh t, \cosh t, 1)}{(1+\cosh 2t)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\cosh 2t}\Big((1+\cosh 2t)(\cosh t, \sinh t, 0) - \sinh 2t\,(\sinh t, \cosh t, 1)\Big)$$

$$= \frac{1}{1+\cosh 2t}\Big(\cosh t + \cosh 2t\cosh t - \sinh 2t\sinh t,\ \sinh t + \cosh 2t\sinh t - \sinh 2t\cosh t,\ -\sinh 2t\Big)$$

ここで

$$\cosh\alpha\cosh\beta - \sinh\alpha\sinh\beta$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta}) - (e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{-\alpha}e^{\beta} + 2e^{\alpha}e^{-\beta}\right) = \frac{e^{\alpha-\beta}+e^{-(\alpha-\beta)}}{2}$$

$$= \cosh(\alpha-\beta)$$

$$\cosh\alpha\sinh\beta - \sinh\alpha\cos\beta$$

$$= \frac{1}{4}\left\{(e^{\alpha}+e^{-\alpha})(e^{\beta}-e^{-\beta}) - (e^{\alpha}-e^{-\alpha})(e^{\beta}+e^{-\beta})\right\}$$

$$= \frac{-e^{\alpha-\beta}+e^{-(\alpha-\beta)}}{2}$$

$$= -\sinh(\alpha-\beta)$$

なので

$$\mathbb{e}_2 = \frac{1}{1+\cosh 2t}\left(2\cosh t,\ 0,\ -\sinh 2t\right)$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{(-\sinh t, \cosh t, -1)}{\sqrt{1+\cosh 2t}}$$

$$\tau = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}\ \ddot{\boldsymbol{r}}\ \dddot{\boldsymbol{r}}|}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|^2} = \frac{1}{1+\cosh 2t}$$

3

(1) $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ を微分すると

$$\dot{\mathbf{r}} = (-2\sin t, 2\cos t), \quad \ddot{\mathbf{r}} = (-2\cos t, -2\sin t),$$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2, \quad |\ddot{\mathbf{r}}| = 2$$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 4\sin t\cos t - 4\cos t\sin t = 0$$

$$\therefore \kappa = \frac{\sqrt{4 \cdot 4 - 0^2}}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(2) $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t)$ を微分すると

$$\dot{\mathbf{r}} = (\sinh t, \cosh t), \quad \ddot{\mathbf{r}} = (\cosh t, \sinh t),$$

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t} = \sqrt{\cosh 2t},$$

$$|\ddot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\cosh 2t}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 2\sinh t\cosh t = \sinh 2t$$

$$\therefore \kappa = \frac{\sqrt{\cosh^2 2t - \sinh^2 2t}}{(\cosh 2t)^{3/2}} = \frac{1}{(\cosh 2t)^{3/2}}$$

問題4.2.2

4

$\boldsymbol{r}(t) = (t, f(t))$ を微分すると

$\dot{\boldsymbol{r}} = (1, \dot{f})$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = (0, \ddot{f})$

$\therefore\ |\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{1+(\dot{f})^2}$, $|\ddot{\boldsymbol{r}}| = |\ddot{f}|$, $\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = \dot{f}\ddot{f}$

よって,

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|^2|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 - (\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})^2 = \{1+(\dot{f})^2\}|\ddot{f}|^2 - (\dot{f}\ddot{f})^2 = |\ddot{f}|^2$$

なので, 問題3の公式より

$$\kappa = \frac{\sqrt{|\dot{\boldsymbol{r}}|^2|\ddot{\boldsymbol{r}}|^2 - (\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})^2}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3} = \frac{|\ddot{f}|}{\{1+(\dot{f})^2\}^{3/2}}$$

(1) $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)$ について, $f(t) = t^2$ とすると

$$\kappa = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

(2) $\boldsymbol{r}(t) = (t, e^{-t})$ について, $f(t) = e^{-t}$ とすると

$$\kappa = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-2t})^{3/2}}$$