3.9節

1(1) $f(x)=1$ の正弦級数のフーリエ係数 A_n は.

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)$$ より

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)e^{-k^2n^2t}\sin nx$$ である.

(2). $u(x,0)$ の正弦級数のフーリエ係数 A_n は

$$A_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\,dx\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)-\frac{1}{n}\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left((-1)^{n+1}-1+2\cos\frac{\pi n}{2}\right)$$ より

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{2}\frac{2}{\pi n}\left((-1)^{n+1}-1+2\cos\frac{\pi n}{2}\right)e^{-k^2n^2t}\cdot\sin nx$$ である

2(1). $f(x)$ に対して.

$$\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$$ より

$$u(x,y)=\sum\frac{2}{n}\frac{(e^{ny}-e^{-ny})}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})}(-1)^{n+1}\sin nx$$ である.

(2) $f(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} = \cos 2x$ より

$n=2$ のとき.

$$\int_0^\pi \cos 2x \cdot \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 4x \, dx = 0.$$

$n \neq 2$ のとき

$$\int_0^\pi \cos 2x \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(n+2)x + \sin(n-2)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+2}\cos(n+2)x - \frac{1}{n-2}\cos(n-2)x\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right)\left((-1)^n - 1\right)\right) = \frac{n}{n^2-4}\left(1-(-1)^n\right)$$ である

$$\therefore u(x,t) = \sum_{n \neq 2} \frac{2(e^{ny} - e^{-ny})}{\pi(e^{n\pi} - e^{-n\pi})} \cdot \frac{n}{n^2-4}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$$

3. $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ として教科書と同様にして解くと.

$X(x) = C_n \cdot \sin nx$ がわかる. このとき. $Y''(y) = n^2 Y(y)$ であるが.

初期条件と境界条件が異なるので. 補題3.9.3は使えない. そこでこれを解くと.

特性方程式.

$\lambda^2 = n^2$ の解は $\pm n$ より. $Y(y) = a \cdot e^{ny} + b e^{-ny}$ となるが.

$u(x,\pi) = 0$ より $Y(\pi) = 0$ となり. $a e^{\pi n} + b e^{-\pi n} = 0$ である. これより

$Y(y) = D_n \cdot (e^{n(\pi - y)} - e^{-n(\pi - y)})$ ($a = -D_n \cdot e^{-\pi n}$, $b = D_n e^{\pi n}$ とした)

となる. $\therefore$ $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (e^{n(\pi-y)} - e^{-n(\pi-y)}) \sin nx$ となるが.

$u(x,0) = f(x)$ より. フーリエ級数を考えれば.

No.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{e^{n(\pi-y)}-e^{-n(\pi-y)}}{e^{\pi n}-e^{-\pi n}}\left(\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx$$ となる.

また, $f(x)=x$ について,

$$\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$$ より.

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\frac{e^{n(\pi-y)}-e^{-n(\pi-y)}}{e^{\pi n}-e^{-\pi n}}(-1)^{n+1}\sin nx$$ である