3.4節

1 (1) $f(x)$は奇関数より. $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[\frac{-l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$ となり

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$ である

(2) $f(x)$は奇関数より. $a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

$$=-\frac{2l}{\pi n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l=\frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}$$ となり.

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n}{l}x$$ となる.

(3) $g(x)=f(x)-3=-2x$ とすると. (2)より

$$g(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{\pi n}(-1)^n\sin\frac{\pi n}{l}x$$ となり

$$f(x)\sim 3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{\pi n}(-1)^n\sin\frac{\pi n}{l}x$$ となる.

(4) $f(x)$は偶関数より, $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x^2dx=\frac{2}{3}l^2$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[\frac{l}{\pi n}x^2\sin\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l-\frac{4}{\pi n}\int_0^l x\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{l}{\pi n}x\cos\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l-\frac{4l}{\pi^2n^2}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

No.

$= \frac{4l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{4l}{\pi^2 n^2}\left[\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l = \frac{4l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n$ より

$f(x) \sim \frac{1}{3}l^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n\cos\frac{\pi n}{l}x$ である

(5) 3倍角の公式から.

$f(x) = \frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{l}$ である.

(6) まず $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} e^{-x}dx = \frac{1}{l}\left[-e^{-x}\right]_{-l}^{l} = \frac{1}{l}(e^{l} - e^{-l})$ である.

$A = \int_{-l}^{l} e^{-x}\cos\frac{\pi n x}{l}dx$ とすると.

$A = \left[\frac{l}{\pi n}e^{-x}\sin\frac{\pi n x}{l}\right]_{-l}^{l} + \frac{l}{\pi n}\int_{-l}^{l} e^{-x}\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

$= \frac{l}{\pi n}\left[-\frac{l}{\pi n}e^{-x}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_{-l}^{l} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2}\int_{-l}^{l} e^{-x}\cos\frac{\pi n x}{l}dx$

$= -\frac{l^2}{\pi^2 n^2}(-1)^n(e^{-l} - e^{l}) - \frac{l^2}{\pi^2 n^2}A$ より

$A = \frac{l^2}{\pi^2 n^2 + l^2}(-1)^n(e^{l} - e^{-l})$ となる

$\therefore a_n = \frac{l}{\pi^2 n^2 + l^2}(-1)^n(e^{l} - e^{-l})$ である. また. 計算から.

$b_n = \frac{\pi n}{l^2}A = \frac{\pi n}{\pi^2 n^2 + l^2}(-1)^n(e^{l} - e^{-l})$ となる

$\therefore f(x) \sim \frac{1}{2l}(e^{l} - e^{-l}) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{l} - e^{-l}}{\pi^2 n^2 + l^2}(-1)^n\left(l\cos\frac{\pi n x}{l} + \pi n\sin\frac{\pi n x}{l}\right)$

となる.

No.

2.(1) 余弦 $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l 3\ dx=6$, $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l 3\cos\frac{\pi n x}{l}dx=0$

より $f(x)\sim 3$

正弦 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l 3\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{6}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l$

$=-\frac{6}{\pi n}((-1)^n-1)=\frac{6}{\pi n}(1-(-1)^n)$ より

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin\frac{\pi n x}{l}$ である.

(2) 余弦 $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x-1\ dx=\frac{2}{l}\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^l=l-2$.

$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l(x-1)\cos\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{2}{l}\left[\frac{l}{\pi n}(x-1)\sin\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l-\frac{2}{\pi n}\int_0^l\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

$=\frac{-2}{\pi n}\cdot\left[-\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l=\frac{2l}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1)$ より

$f(x)\sim\frac{l}{2}-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1)\cos\frac{\pi n x}{l}$ である.

正弦 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l(x-1)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$

$=\frac{2}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}(x-1)\cos\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l+\frac{2}{\pi n}\int_0^l\cos\frac{\pi n}{l}x\ dx$

$=-\frac{2}{\pi n}((l-1)\cdot(-1)^n+1)+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l$

$=\frac{2}{\pi n}((-1)^{n+1}(l-1)-1)$ より

$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}((-1)^{n+1}(l-1)-1)\sin\frac{\pi n x}{l}$ である

No.

(3) 余弦　$f(x) \sim \cos\frac{2\pi x}{l}$.

正弦　$n=2$ のとき.

$$b_2 = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{4\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{1}{l}\left[-\frac{l}{4\pi}\cos\frac{4\pi x}{l}\right]_0^l = 0$$ となる. また $n \neq 2$ のとき.

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \sin\frac{(n+2)\pi x}{l} + \sin\frac{(n-2)\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{1}{l}\left[-\frac{l}{(n+2)\pi}\cos\frac{(n+2)\pi x}{l} - \frac{l}{(n-2)\pi}\cos\frac{(n-2)\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n-2}\right)\left((-1)^n-1\right) = \frac{2n(1-(-1)^n)}{\pi(n^2-4)}$$ より

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 2}\frac{2n(1-(-1)^n)}{\pi(n^2-4)}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

(4) 余弦　$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x^3\,dx = \frac{1}{2}l^3$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^3\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \left[\frac{2}{\pi n}x^3\sin\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l - \frac{6}{\pi n}\int_0^l x^2\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$= \frac{6}{\pi n}\left[\frac{l}{\pi n}x^2\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l - \frac{12 l}{\pi^2 n^2}\int_0^l x\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$= \frac{6l^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{12 l}{\pi^2 n^2}\left[\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l + \frac{12 l^2}{\pi^3 n^3}\int_0^l \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$= \frac{6l^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{12 l^2}{\pi^3 n^3}\left[\frac{l}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l$$

$$= \frac{6l^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{12 l^3}{\pi^4 n^4}(-1)^n + \frac{12 l^3}{\pi^4 n^4}$$ より.

No.

$$f(x) \sim \frac{1}{4}l^3 + \sum \left(\frac{6l^3}{\pi^2 n^2}(-1)^n - \frac{12l^3}{\pi^4 n^4}(-1)^n + \frac{12l^3}{\pi^4 n^4} \right) \cos\frac{\pi n x}{l}$$ である

正弦 $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^3 \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\left[-\frac{l}{\pi n}x^3\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l + \frac{6}{\pi n}\int_0^l x^2 \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$

$$= -\frac{2l^3}{\pi n}(-1)^n + \frac{6}{\pi n}\left[\frac{l}{\pi n}x^2\sin\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l - \frac{12l}{\pi^2 n^2}\int_0^l x \sin\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$= \frac{2l^3}{\pi n}(-1)^{n+1} - \frac{12l}{\pi^2 n^2}\left[-\frac{l}{\pi n}x\cos\frac{\pi n x}{l}\right]_0^l - \frac{12l^2}{\pi^3 n^3}\int_0^l \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx$$

$$= \frac{2l^3}{\pi n}(-1)^{n+1} + \frac{12l^3}{\pi^3 n^3}(-1)^n$$ より

$$f(x) \sim \sum \left(\frac{2l^3}{\pi n}(-1)^{n+1} + \frac{12l^3}{\pi^3 n^3}(-1)^n \right) \sin\frac{\pi n x}{l}$$ である.