3.3節

1.(1) $f(x)$は奇関数より $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$ である

また $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$ より.

$\frac{2}{3}\pi^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$ となり. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を得る.

(2). $f(x)$は奇関数より $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)$$ である

また. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2$ より

nが偶数のときは0になるので奇数のところだけを足している

$2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)\right|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}$ となり

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ となる.

(3). $f(x)$は偶関数より $b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\right]_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^n-\frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$ である.

No.

また. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{5}\pi^4$ より

$\frac{2}{5}\pi^4=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$ となる

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4$ である.

2 (1) $f(x)=2x$ のフーリエ級数は. $f(x)$ が奇関数より $a_n=0$ であり.また.

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{4}{n}(-1)^n+\left[\frac{4}{\pi n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$ より

$S_5(x)=\sum_{n=1}^{5}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ である.

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\,dx=2$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$$ より

$S_5(x)=1+\sum_{n=1}^{5}\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin nx$ である.