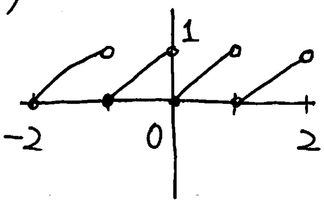
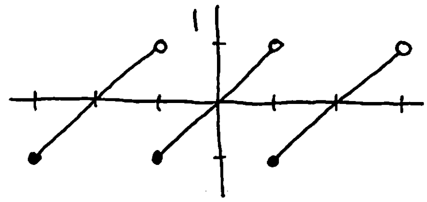
3.1節

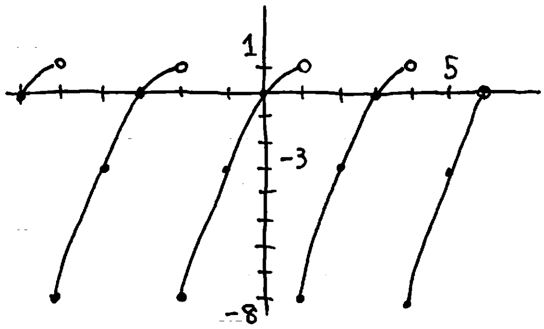
1.(1)



(2)



(3) $f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$ より

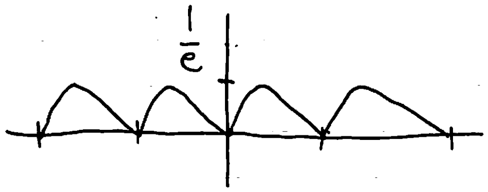


となる

(4). $\lim_{x\to+0} -x\log x=0$ であり. また. $f'(x)=-\log x-1$ より

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$f(x)$	0に近づく	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

となることから.



となる.

2(1). $f(x)$は(原点を除いて)奇関数より

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=0.$$ である. また.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{-2}{\pi n}((-1)^n-1)=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$$ より

No.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin nx$$ となる.

(2) $f(x)$は奇関数より. $a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{\pi n}\Big[x\cos nx\Big]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin nx\Big]_0^{\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

$$\therefore f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

(3) a_n, b_nを計算すると.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[x^2-3x\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}(\pi^2-3\pi-\pi^2-3\pi)=-6$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{n}(2x-3)\sin nx\Big]_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-3)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}(2x-3)\cos nx\Big]_{-\pi}^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(-1)^n\cdot\big((2\pi-3)-(-2\pi-3)\big)+\frac{2}{\pi n^2}\Big[\sin nx\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$ となり

$$f(x)\sim -3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$ となる.

(4) a_n, b_nを計算すると.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2-3x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}\pi^3-\frac{3}{2}\pi^2+\frac{1}{3}\pi^3+\frac{3}{2}\pi^2\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2$$

$x\cos nx$が奇関数なので.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-3x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{1}{n}x \cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n - \frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-3x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -3x \sin nx \, dx = \frac{-6}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= \frac{6}{n}(-1)^n$$ ← (2)の計算と同じなので省略.

$$\therefore f(x) \sim \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx + \frac{6}{n}(-1)^n \sin nx$$ となる.

(5) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ より $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$ である.

(6) $A = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx$ とすると. $(n \neq 0)$

$$A = \left[\frac{1}{n}e^x \sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}e^x \cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{n^2}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi}) - \frac{1}{n^2}A$$

$$\therefore A = \frac{1}{n^2+1}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})$$ また. この計算の一行目から

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx \, dx = -\frac{n}{\pi}A = \frac{n}{(n^2+1)\pi}(-1)^{n+1}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$ となる. さらに.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \, dx = \frac{1}{\pi}\left[e^x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$ より

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi})\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx + \frac{n}{n^2+1}(-1)^{n+1}\sin nx\right\}$$

となる.

No.

3 (1) $f(x)$ のフーリエ級数を求めると．偶関数より $b_n=0$．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}\pi^3+\frac{1}{3}\pi^3\right)=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$ ← 2(4)の計算から．

$$\therefore f(x)\sim\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$ となる．

$f(x)$ は $x=0$ で連続なので．x に 0 を代入すると．

$$0=f(0)=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n$$ となり．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{1}{12}\pi^2$$ となる．

(2)．2(2)より $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$ である．

$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}$ で連続なので．x に $\frac{\pi}{2}$ を代入すると．

$$\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(-1)^{(2n-1)+1}\sin\frac{\pi(2n-1)}{2}$$

n が偶数だと．$\sin\frac{\pi n}{2}=0$ より奇数のところだけぬき出している

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin\left(\pi n-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(-1)^{n+1}$$ となる．

$\cos n\pi=(-1)^n$ と似た考察をする．

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1}=\frac{\pi}{4}$$ である．