問題2.2 解答

1. (1) $L(t^2+3t+4) = L(t^2)+3L(t)+4L(1)$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}$$

(2) $L((t-1)^3) = L(t^3-3t^2+3t-1) = \frac{6}{s^4} - \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s}$

(3) $L(\cos(2t+\frac{\pi}{6})) = L(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4}$$

(4) $L(\sinh t + \sin t) = \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2+1}$

(5) $f(t) = (t+1)^2$ とすると． $L(f) = L(t^2+2t+1) = \frac{2+2s+s^2}{s^3}$ より

$L((t+1)^2 e^{3t}) = L(f)(s-3)$

$$= \frac{2+2(s-3)+(s-3)^2}{(s-3)^3} = \frac{s^2-4s+5}{(s-3)^2}$$

(6) $L(e^{-t}\cdot\cos t) = L(\cos t)(s+1)$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

(7) $L(f(t)) = L((\cos t)_2) = e^{-2s}\cdot\frac{s}{s^2+1}$

2. (1) $L(t\sin t) = -L(-t\sin t) = -\frac{d}{ds}L(\sin t) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

(2) $L(t\cos t) = L((-t)^2\cos t) = \frac{d^2}{ds^2}L(\cos t) = \frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{s^2+1}$

$$= \frac{d}{ds}\cdot\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{d}{ds}\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2} = \frac{-2s(s^2+1)^2-4s(s^2+1)(-s^2+1)}{(s^2+1)^4} = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$$

(3) $L(t\cosh 2t) = -\dfrac{d}{ds}\cdot\dfrac{s}{s^2-4} = -\dfrac{s^2-4-2s^2}{(s^2-4)^2} = \dfrac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$

(4) $L(t^2\sinh t) = \dfrac{d^2}{ds^2}\dfrac{1}{s^2-1} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{-2s}{(s^2-1)^2} = \dfrac{-2(s^2-1)^2+8s^2(s^2-1)}{(s^2-1)^4}$

$= \dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$

3. (1) $L\left(\dfrac{1-e^{2t}}{t}\right) = \int_s^\infty L(1-e^{2t})(p)\,dp = \int_s^\infty \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p-2}\,dp$

$= \left[\log\dfrac{p}{p-2}\right]_s^\infty = -\log\dfrac{s}{s-2} = \log\dfrac{s-2}{s}$

(2) $L\left(\dfrac{e^t-\cos t}{t}\right) = \int_s^\infty \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{p}{p^2+1}\,dp = \left[\log(p-1) - \dfrac{1}{2}\log(p^2+1)\right]_s^\infty$

$= \left[\log\dfrac{p-1}{(p^2+1)^{\frac{1}{2}}}\right]_s^\infty = -\log\dfrac{s-1}{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \log\dfrac{(s^2+1)^{\frac{1}{2}}}{s-1}$

(3) $L\left(\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}\right) = \int_s^\infty \dfrac{p}{p^2+1} - \dfrac{p}{p^2+4}\,dp = \left[\dfrac{1}{2}\log(p^2+1) - \dfrac{1}{2}\log(p^2+4)\right]_s^\infty$

$= \dfrac{1}{2}\left(-\log(s^2+1) + \log(s^2+4)\right)$

(4) $L\left(\dfrac{\sinh t}{t}\right) = \int_s^\infty \dfrac{1}{p^2-1}\,dp = \dfrac{1}{2}\int_s^\infty \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p+1}\,dp$

$= \dfrac{1}{2}\left[\log(p-1) - \log(p+1)\right]_s^\infty = \dfrac{1}{2}\left(\log(s+1) - \log(s-1)\right)$

4. (1) $L(\sin^2 t) = L\left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right) = \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$

(2) $L(\sin^3 t) = L\left(-\dfrac{1}{4}\sin 3t + \dfrac{3}{4}\sin t\right) = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{3}{s^2+9} + 3\cdot\dfrac{1}{s^2+1}\right)$

$= \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+9}\right) = \dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$

(3) $L(\sin t\cos 2t) = L\left(\frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1}\right)$

$= \frac{s^2-3}{(s^2+1)(s^2+9)}$

(4) $L(\cos t\cos 2t) = L\left(\frac{1}{2}(\cos 3t + \cos t)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{s}{s^2+1}\right)$

$= \frac{s(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+9)}$

5.(1) $L\left(\int_0^t e^{3u}du\right) = \frac{1}{s}L(e^{3u}) = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s-3}$

$L\left(\int_0^t e^{3u}du\right) = L\left(\left[\frac{1}{3}e^{3u}\right]_0^t\right) = L\left(\frac{1}{3}(e^{3t}-1)\right)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s(s-3)}$

(2) $L\left(\int_0^t \sin 2u\,du\right) = \frac{1}{s}L(\sin 2u) = \frac{1}{s}\cdot\frac{2}{s^2+4}$

$L\left(\int_0^t \sin 2u\,du\right) = L\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2u\right]_0^t\right) = L\left(\frac{1}{2}(-\cos 2t + 1)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-s}{s^2+4} + \frac{1}{s}\right) = \frac{2}{s(s^2+4)}$

(3) $L\left(\int_0^t\int_0^u \cos 2v\,dv\,du\right) = \frac{1}{s^2}L(\cos 2v) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{s(s^2+4)}$

$L\left(\int_0^t\int_0^u \cos 2v\,dv\,du\right) = L\left(\int_0^t\left[\frac{1}{2}\sin 2v\right]_0^u du\right) = L\left(\int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u\,du\right)$

$= \frac{1}{2}L\left(\left[-\frac{1}{2}\cos 2u\right]_0^t\right) = -\frac{1}{4}L(\cos 2t - 1) = -\frac{1}{4}\left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s(s^2+4)}$

6.(1) $L(t^2 * e^{2t}) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{s-2}$

$$t^2 * e^{2t} = \int_0^t u^2 \cdot e^{2(t-u)} du = \left[-\frac{1}{2}u^2 \cdot e^{2(t-u)}\right]_0^t + \int_0^t u e^{2(t-u)} du$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + \left[-\frac{1}{2}u e^{2(t-u)}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t e^{2(t-u)} du$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{2(t-u)}\right]_0^t = -\frac{1}{4}(2t^2 + 2t + 1 - e^{2t}) \quad \text{より}$$

$$L(t^2 * e^{2t}) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{s^3(s-2)}$$

(2) $L(\sin t * \cos t) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{s}{s^2+1}$

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin u \cdot \cos(t-u) du = \frac{1}{2}\int_0^t \sin t - \sin(2u-t)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\left[u \sin t + \frac{1}{2}\cos(2u-t)\right]_0^t = \frac{1}{2}\left(t\sin t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos(-t)\right) = \frac{1}{2}t\sin t$$

2.(1) より $L(\sin t * \cos t) = L\left(\frac{1}{2}t\sin t\right) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$.

(3) $L(e^{2t} * \sin t) = \frac{1}{s-2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

$$e^{2t} * \sin t = \int_0^t e^{2u} \cdot \sin(t-u) du = \left[e^{2u}\cos(t-u)\right]_0^t - 2\int_0^t e^{2u}\cos(t-u) du$$

$$= e^{2t} - \cos t - 2\left[-e^{2u}\sin(t-u)\right]_0^t - 4\int_0^t e^{2u}\sin(t-u) du \quad \text{より.}$$

$$e^{2t} * \sin t = \frac{1}{5}(e^{2t} - \cos t - 2\sin t)$$

$$\therefore L(e^{2t} * \sin t) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\right) = \frac{1}{(s-2)(s^2+1)}$$

1

問題2.3

(1) $\dfrac{1}{2s+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+1/2} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-\frac{t}{2}}) = \mathcal{L}(\tfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{2s+1}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$

(2) $\dfrac{2s}{(s-2)^2} = \dfrac{2(s-2)+4}{(s-2)^2} = \dfrac{2}{s-2} + \dfrac{4}{(s-2)^2} = 2\mathcal{L}(e^{2t}) + 4\mathcal{L}(t)(s-2)$

$= \mathcal{L}(2e^{2t}) + \mathcal{L}(4te^{2t}) = \mathcal{L}(2e^{2t}(1+2t)) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s}{(s-2)^2}\right) = 2e^{2t}(1+2t)$

(3) $\dfrac{s}{s^2-2s+5} = \dfrac{(s-1)+1}{(s-1)^2+4} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2+4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

$= \mathcal{L}(\cos 2t)(s-1) + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)(s-1) = \mathcal{L}(e^{t}\cos 2t) + \dfrac{1}{2}(e^{t}\sin 2t) = \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}e^{t}(2\cos 2t + \sin 2t)\right)$

$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2-2s+5}\right) = \dfrac{1}{2}e^{t}(2\cos 2t + \sin 2t)$

(4) $\dfrac{s}{s^2-2s-3} = \dfrac{s}{(s-1)^2-4} = \dfrac{(s-1)+1}{(s-1)^2-4} = \dfrac{s-1}{(s-1)^2-4} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{(s-1)^2-4}$

$= \mathcal{L}(\cosh 2t)(s-1) + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(\sinh 2t)(s-1) = \mathcal{L}(e^{t}\cosh 2t) + \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(e^{t}\sinh 2t)$

$= \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}e^{t}(2\cosh 2t + \sinh 2t)\right) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2-2s-3}\right) = \dfrac{1}{2}e^{t}(2\cosh 2t + \sinh 2t) = \dfrac{1}{4}(3e^{3t} + e^{-t})$

(5) $\dfrac{e^{-2s}}{(s+2)^3} = e^{-2s}\mathcal{L}\left(\dfrac{t^2}{2}\right)(s+2) = e^{-2s}\mathcal{L}\left(\dfrac{t^2}{2}e^{-2t}\right) = \left(\dfrac{t^2}{2}e^{-2t}\right)_2$

平行移動定理

(6) $\dfrac{e^{-s}}{s^2-4} = e^{-s}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2-4}\right) = \dfrac{e^{-s}}{2}\mathcal{L}(\sinh 2t) = e^{-s}\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{2}\sinh 2t\right) = \left(\dfrac{1}{2}\sinh 2t\right)_1$

2

(1) $\dfrac{s-8}{s^2-s-6} = \dfrac{s-8}{(s+2)(s-3)} = \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{1}{s-3} = 2\mathcal{L}(e^{-2t}) - \mathcal{L}(e^{3t})$

$= \mathcal{L}(2e^{-2t} - e^{3t}) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s-8}{s^2-s-6}\right) = 2e^{-2t} - e^{3t}$

(2) $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+4}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\mathcal{L}(\sin t) - \dfrac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)\right)$

$= \mathcal{L}\left(\dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{6}\sin 2t\right) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) = \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{6}\sin 2t$

(3) $\dfrac{2s^2-3s-2}{s(s+2)(s-1)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s-1}=\mathcal{L}(1)+2\mathcal{L}(e^{-2t})-\mathcal{L}(e^{t})$

$=\mathcal{L}(1+2e^{-2t}-e^{t})\quad\therefore\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2s^2-3s-2}{s(s+2)(s-1)}\right)=\underline{1+2e^{-2t}-e^{t}}$

(4) $\dfrac{3s^2+10s+10}{(s+2)(s^2+2s+2)}=\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2s+4}{s^2+2s+2}=\mathcal{L}(e^{-2t})+\dfrac{2(s+1)+2}{(s+1)^2+1}$

$=\mathcal{L}(e^{-2t})+2\cdot\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}+2\cdot\dfrac{1}{(s+1)^2+1}=\mathcal{L}(e^{-2t})+2\mathcal{L}(\cos t)(s+1)+2\mathcal{L}(\sin t)(s+1)$

$=\mathcal{L}(e^{-2t})+2\mathcal{L}(e^{-t}\cos t)+2\mathcal{L}(e^{-t}\sin t)=\mathcal{L}(e^{-2t}+2e^{-t}(\cos t+\sin t))$

$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3s^2+10s+10}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right)=\underline{e^{-2t}+2e^{-t}(\cos t+\sin t)}$

(5) $\dfrac{1}{s(s^2-4)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{s}{s^2-4}-\dfrac{1}{s}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\mathcal{L}(\cosh 2t)-\mathcal{L}(1)\right)$

$=\mathcal{L}\left(\dfrac{1}{4}(\cosh 2t-1)\right)\quad\therefore\ \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2-4)}\right)=\dfrac{1}{4}(\cosh 2t-1)$

(6) $\dfrac{1}{s^2(s-1)^3}=\dfrac{As+B}{s^2}+\dfrac{Cs^2+Ds+E}{(s-1)^3}$ とおいて分母を払うと

$1=(As+B)(s-1)^3+(Cs^2+Ds+E)s^2$

$=(A+C)s^4+(-3A+B+D)s^3+(3A-3B+E)s^2+(-A+3B)s-B$

$\therefore\ \begin{cases}A+C=0\\-3A+B+D=0\\3A-3B+E=0\\-A+3B=0\\-B=1\end{cases}\qquad\therefore\ A=-3,\ B=-1,\ C=3,\ D=-8,\ E=6$

$\therefore\ \dfrac{1}{s^2(s-1)^3}=\dfrac{-3s-1}{s^2}+\dfrac{3s^2-8s+6}{(s-1)^3}$

$=-3\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{3(s^2-2s+1)-2(s-1)+1}{(s-1)^3}=-3\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(t)+\dfrac{3}{s-1}-\dfrac{2}{(s-1)^2}+\dfrac{1}{(s-1)^3}$

$$= \mathcal{L}(-3-t) + 3\mathcal{L}(e^{t}) - 2\mathcal{L}(t)(s-1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2)(s-1)$$

$$= \mathcal{L}(-3-t+3e^{t}) - 2\mathcal{L}(te^{t}) + \frac{1}{2}(t^2e^{t}) = \mathcal{L}\left(-3-t+e^{t}\left(3-2t+\frac{t^2}{2}\right)\right)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-1)^3}\right) = -3-t+e^{t}\left(3-2t+\frac{t^2}{2}\right)$$

$\boxed{3}$ (1) $$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(t)\cdot\mathcal{L}(e^{-t}) = \mathcal{L}(t*e^{-t})$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) = t*e^{-t} = \int_0^t (t-u)e^{-u}du = t\int_0^t e^{-u}du - \int_0^t ue^{-u}du$$

$$= t\left[-e^{-u}\right]_0^t - \left\{\left[-ue^{-u}\right]_0^t - \int_0^t(-e^{-u})du\right\} = -t(e^{-t}-1) - \left\{\left[-ue^{-u}\right]_0^t - \int_0^t(-e^{-u})du\right\}$$

$$= -t(e^{-t}-1) - \left\{-te^{-t} + \left[-e^{-u}\right]_0^t\right\} = -\cancel{te^{-t}}+t+\cancel{te^{-t}}-(e^{-t}-1) = t+e^{-t}-1$$

(2) $$\frac{1}{(s+1)^2(s-2)} = \mathcal{L}(t)(s+1)\cdot\mathcal{L}(e^{2t}) = \mathcal{L}(te^{-t})\cdot\mathcal{L}(e^{2t}) = \mathcal{L}(te^{-t}*e^{2t})$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2(s-2)}\right) = te^{-t}*e^{2t} = \int_0^t e^{2(t-u)}\cdot ue^{-u}du = \int_0^t e^{2t}\cdot ue^{-3u}du$$

$$= e^{2t}\int_0^t ue^{-3u}du = e^{2t}\left\{\left[u\left(-\frac{1}{3}e^{-3u}\right)\right]_0^t - \int_0^t\left(-\frac{1}{3}e^{-3u}\right)du\right\}$$

$$= e^{2t}\left\{-\frac{t}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}e^{-3u}\right]_0^t\right\} = -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{e^{2t}}{9}(e^{-3t}-1)$$

$$= -\frac{t}{3}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{e^{2t}}{9}$$

(3) $$\frac{s^2}{(s^2+4)^2} = \frac{s}{s^2+4}\cdot\frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}(\cos 2t)\cdot\mathcal{L}(\cos 2t) = \mathcal{L}(\cos 2t * \cos 2t)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right) = \cos 2t * \cos 2t = \int_0^t \cos 2(t-u)\cos 2u\,du.$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^t \cos 2t\,du + \int_0^t \cos(2t-4u)du\right\} = \frac{1}{2}\left\{t\cos 2t + \left[-\frac{1}{4}\sin(2t-4u)\right]_0^t\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{t\cos 2t - \frac{1}{4}\left(\sin(-2t) - \sin 2t\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)$$

$$= \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

$\boxed{4}$ (1) $\mathcal{L}(f(t)) = \tan^{-1}\frac{s}{2}$ とおくと $\mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{s}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{s^2+4}$

$$= \frac{2}{s^2+4} = \mathcal{L}(\sin 2t) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\tan^{-1}\frac{s}{2}\right) = f(t) = -\frac{\sin 2t}{t}$$

(2) $\mathcal{L}(f(t)) = \log\frac{2s^2+1}{s(s^2+1)}$ とおくと $\mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds}\log\frac{2s^2+1}{s(s^2+1)}$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\log(2s^2+1) - \log s - \log(s^2+1)\right\} = \frac{4s}{2s^2+1} - \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2+1}$$

$$= 2\cdot\frac{s}{s^2+\frac{1}{2}} - \mathcal{L}(1) - 2\mathcal{L}(\cos t) = 2\mathcal{L}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - \mathcal{L}(1) - 2\mathcal{L}(\cos t)$$

$$= \mathcal{L}\left(2\cos\frac{t}{\sqrt{2}} - 1 - 2\cos t\right) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\log\frac{2s^2+1}{s(s^2+1)}\right) = f(t) = \frac{1+2\cos t - 2\cos\frac{t}{\sqrt{2}}}{t}$$

(3) $\mathcal{L}(f(t)) = \log\frac{s^2+1}{s^2-1}$ とおくと $\mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds}\log\frac{s^2+1}{s^2-1}$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\log(s^2+1) - \log(s^2-1)\right\} = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2-1} = 2\mathcal{L}(\cos t) - 2\mathcal{L}(\cosh t)$$

$$= \mathcal{L}(2(\cos t - \cosh t)) \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\log\frac{s^2+1}{s^2-1}\right) = f(t) = \frac{2(\cosh t - \cos t)}{t}$$

(1) $\mathcal{L}(f(t)) = \sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$ とおくと $\mathcal{L}(-tf(t)) = \frac{d}{ds}\sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+s^2} - s\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{\sqrt{1+s^2}}}{1+s^2} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+s^2-s^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+s^2} - \frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}}{1+s^2}$$

$$= \frac{1+s^2-s^2}{1+s^2} = \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(\sin t) \quad \therefore f(t) = -\frac{\sin t}{t} \quad \therefore \mathcal{L}^{-1}\left(\sin^{-1}\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right) = -\frac{\sin t}{t}$$

2.4.1節

1.（1）両辺をラプラス変換すると

$$s^2F(s)-1-3sF(s)+2F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

となる．この両辺をラプラス逆変換し，

$$f(t)=e^{2t}-e^{t}$$ を得る．

部分分数分解をしているが，詳細は省略．

（2）ラプラス変換すると，

$$2(s^2F(s)-3)-5sF(s)+2F(s)=0$$ より．

$$F(s)=\frac{6}{2s^2-5s+2}=\frac{6}{(s-2)(2s-1)}=2\left(\frac{1}{s-2}-\frac{2}{2s-1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)$$ となり． $$f(t)=2(e^{2t}-e^{\frac{t}{2}})$$ を得る．

（3）ラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-2-6sF(s)+9F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{2}{s^2-6s+9}=\frac{2}{(s-3)^2}=2\cdot L(t)(s-3)=L(2te^{3t})$$ となり

$$f(t)=2te^{3t}$$ を得る．

（4）ラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-s-2-4(sF(s)-1)+5F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{s-2}{s^2-4s+5}=\frac{s-2}{(s-2)^2+1}=L(\cos t)(s-2)$$ となり

$$f(t)=e^{2t}\cdot\cos t$$ を得る．

2.(1) ラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-2sF(s)+3F(s)=\frac{1}{s}$$ より

$$F(s)=\frac{1}{s(s^2-2s+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s-2}{s^2-2s+3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s-1}{(s-1)^2+2}+\frac{1}{(s-1)^2+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s}-\frac{s-1}{(s-1)^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(L(1)-L(\cos\sqrt{2}t)(s-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}L(\sin\sqrt{2}t)(s-1)\right)$$ となり,

$$f(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^t\cdot\cos\sqrt{2}t+\frac{1}{3\sqrt{2}}e^t\sin\sqrt{2}t$$

$$=\frac{1}{6}\left(2-e^t(2\cos\sqrt{2}t)-\sqrt{2}e^t\sin\sqrt{2}t)\right)$$ を得る.

(2) ラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-s-(sF(s)-1)=\frac{1}{s^2+1}$$ より

$$F(s)=\frac{1}{s^2-s}\left(\frac{1}{s^2+1}+s-1\right)=\frac{1}{s^2-s}\left(\frac{s^3+s-s^2-1+1}{s^2+1}\right)$$

$$=\frac{s^2-s+1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{s-1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

となり, $f(t)=\frac{1}{2}(e^t+\cos t-\sin t)$ を得る.

(3) ラプラス変換すると.

$$s^3F(s)+2s^2F(s)-11sF(s)-12F(s)=\frac{4}{s}$$ より

$$F(s)=\frac{4}{s}\cdot\frac{1}{s^3+2s^2-11s-12}=\frac{4}{s(s+1)(s-3)(s+4)}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3(s+1)}+\frac{1}{21(s-3)}-\frac{1}{21(s+4)}$$ となり

$$f(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{21}e^{3t}-\frac{1}{21}e^{-4t}$$ を得る.

(4) ラプラス変換すると

$$s^2F(s)-2s-2(sF(s)-2)+5F(s)=\frac{8s}{s^2-1}$$ より

$$F(s)=\frac{1}{s^2-2s+5}\left(\frac{8s}{s^2-1}+2s-4\right)=\frac{2s^3-4s^2+6s+4}{(s^2-2s+5)(s^2-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{s^2-2s+5}+\frac{3s+1}{s^2-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4}-\frac{2}{(s-1)^2+4}+3\cdot\frac{s}{s^2-1}+\frac{1}{s^2-1}\right)$$ となり

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(e^t\cdot\cos 2t-e^t\sin 2t+3\cosh t+\sinh t\right)$$ を得る.

(別解).

$$F(s)=\frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{s^2-2s+5}+\frac{2}{s-1}+\frac{1}{s+1}\right)$$ より

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(e^t\cos 2t-e^t\sin 2t+2e^t+e^{-t}\right)$$ としてもよい.

2.4.2節

1.(1) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$s^2F(s)-a+4sF(s)+5F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{a}{s^2+4s+5}=\dfrac{a}{(s+2)^2+1}$ となり

$f(t)=a\cdot e^{-2t}\cdot\sin t$ となる. ここで $f(\frac{\pi}{2})=1$ より

$1=a\cdot e^{-\pi}\cdot 1$ となり, $a=e^{\pi}$. $\therefore f(t)=e^{\pi-2t}\cdot\sin t$.

(2) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$s^2F(s)-a-5sF(s)+4F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{a}{s^2-5s+4}=\dfrac{a}{(s-4)(s-1)}=\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{1}{s-4}-\dfrac{1}{s-1}\right)$ となり

$f(t)=\dfrac{a}{3}(e^{4t}-e^{t})$ となる. ここで $f(1)=1$ より

$1=\dfrac{a}{3}\cdot(e^4-e)$ $\therefore a=\dfrac{3}{e^4-e}$ これより. $f(t)=\dfrac{e^{4t}-e^{t}}{e^4-e}$

(3) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$6s^2F(s)-6a+11sF(s)-10F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{6a}{6s^2+11s-10}=\dfrac{6a}{(2s+5)(3s-2)}=\dfrac{6}{19}a\left(\dfrac{3}{3s-2}-\dfrac{2}{2s+5}\right)$

$=\dfrac{6}{19}a\left(\dfrac{1}{s-\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{s+\frac{5}{2}}\right)$ となり

$f(t)=\dfrac{6}{19}a\left(e^{\frac{2}{3}t}-e^{-\frac{5}{2}t}\right)$ となる. ここで $f(1)=1$ より

$1=\dfrac{6}{19}a\cdot(e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}})$ $\therefore a=\dfrac{19}{6}(e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}})$ $\therefore f(t)=\dfrac{e^{\frac{2}{3}t}-e^{-\frac{5}{2}t}}{e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}}}$

(4) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-3s-a+4sF(s)-12+6F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{3s+12+a}{s^2+4s+6}=\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+2}+\frac{a+6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}$$ となり

$$f(t)=3e^{-2t}\cos\sqrt{2}t+\frac{a+6}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$ となる．

ここで $f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=3$ より． $3=\frac{a+6}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$ となり

$\frac{a+6}{\sqrt{2}}=3e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$ $\therefore f(t)=3e^{-2t}(\cos\sqrt{2}t+e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\sin\sqrt{2}t)$ を得る．

2. (1) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-a-4sF(s)+3F(s)=\frac{3}{s}$$ より

$$F(s)=\frac{a}{s^2-4s+3}+\frac{3}{s(s^2-4s+3)}$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s}-\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-3}\right)$$ となり

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(2+(a+1)e^{3t}-(a+3)e^{t}\right)$$ となる．

ここで $f(1)=1$ より $1=1+\frac{1}{2}(a+1)e^3-\frac{1}{2}(a+3)e$ となり

$a=\frac{3e-e^3}{e^3-e}$ $\therefore f(t)=1+\frac{1}{e^2-e}e^{3t}-\frac{1}{e^2-e}e^{t+2}$ を得る．

(2) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-s-a-3sF(s)+3=\frac{1}{s^2}$$ より

$$F(s)=\frac{s+a-3}{s^2-3s}+\frac{1}{s^4-3s^3}=\frac{1}{s}+\frac{a}{s(s-3)}+\frac{1}{s^3(s-3)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s}-\frac{3}{s^2}-\frac{9}{s^3}\right)$$ となり

$$f(t)=1+\frac{a}{3}(e^{3t}-1)+\frac{1}{27}\left(e^{3t}-1-3t-\frac{9}{2}t^2\right)$$ となる.

ここで $f(1)=1$ より.

$$1=1+\frac{a}{3}(e^3-1)+\frac{1}{27}\left(e^3-1-3-\frac{9}{2}\right)$$

$$\frac{a}{3}(e^3-1)=\frac{1}{27}\left(\frac{17}{2}-e^3\right) \quad \therefore \frac{a}{3}=\frac{1}{54}\cdot\frac{17-2e^3}{e^3-1}$$ となり

$$f(t)=1+\frac{1}{54}\frac{17-2e^3}{e^3-1}(e^{3t}-1)+\frac{1}{27}\left(e^{3t}-1-3t-\frac{9}{2}t^2\right)$$

$$=1-\frac{1}{9}t-\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{54}(e^{3t}-1)\cdot\frac{17-2e^3+2(e^3-1)}{e^3-1}$$

$$=1-\frac{1}{9}t-\frac{1}{6}t^2+\frac{5(e^{3t}-1)}{18(e^3-1)}$$ を得る.

(3) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-a-2sF(s)+F(s)=\frac{1}{s^2+1}$$ より

$$F(s)=\frac{a}{s^2-2s+1}+\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2+1)}$$

$$=\frac{a}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$$ となり

$$f(t)=a\cdot te^t+\frac{1}{2}(\cos t+te^t-e^t)$$ となる. ここで $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ より

$$0=a\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right) \quad \therefore a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{\pi}te^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}e^t$$ を得る.

No.

2.4.3節

1.(1) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s)-1+G(s)=0 \\ sG(s)-2-F(s)=0 \end{cases}$$

となる. これを解けば.

$$F(s)=\frac{s-2}{s^2+1}, \quad G(s)=\frac{2s+1}{s^2+1}$$

となる. これらをラプラス逆変換し.

$f(t)=\cos t-2\sin t$, $g(t)=2\cos t+\sin t$ を得る.

(2) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} sF(s)-4-3G(s)=0 \\ sG(s)-2-3F(s)=0 \end{cases}$$

となる. $G(s)$ を消去すると.

$$F(s)=\frac{4s+6}{s^2-9}=\frac{3}{s-3}+\frac{1}{s+3}$$

となり

$f(t)=3e^{3t}+e^{-3t}$ となる. これを もとの方程式の第1式に代入し.

$g(t)=3e^{3t}-e^{-3t}$ となる.

(3) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s)+sG(s)-1=0 \\ F(s)-sG(s)+1=0 \end{cases}$$

となる. これを解いて

$F(s)=0$, $G(s)=\frac{1}{s}$ となる.

$\therefore f(t)=0$, $g(t)=1$.

(4) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s)+3G(s)=\frac{2}{s} \\ sG(s)-2F(s)=\frac{1}{s^2} \end{cases}$$

となる. $F(s)$ を消去すると.

$$G(s)=\frac{5}{s(s^2+6)}=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+6}\right)$$ より

$g(t)=\frac{5}{6}(1-\cos\sqrt{6}t)$ となる. これを第2式に代入し.

$f(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\sin\sqrt{6}t-t\right)=\frac{5\sqrt{6}}{12}\sin\sqrt{6}t-\frac{1}{2}t$ となる.

2.(1) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} s^2F(s)-1+G(s)=0 \\ s^2G(s)-1+F(s)=0 \end{cases}$$ となる. これを解いて.

$F(s)=\frac{1}{s^2+1}$, $G(s)=\frac{1}{s^2+1}$ となる ∴ $f(t)=\sin t$, $g(t)=\sin t$.

(2) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s)-1+G(s)-H(s)=0 \\ F(s)+sG(s)-1+H(s)=0 \\ F(s)+G(s)+sH(s)-1=0 \end{cases}$$ となる. これを解いて.

$F(s)=\frac{1}{s}$, $G(s)=H(s)=\frac{s-1}{s(s+1)}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s}$ となる

∴ $f(t)=1$, $g(t)=h(t)=2e^{-t}-1$ となる.

(3) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} sF(s)+G(s)-H(s)=-\frac{3}{s} \\ 4F(s)+7sG(s)-2H(s)=0 \\ 4F(s)-2G(s)-sH(s)=-\frac{8}{s} \end{cases}$$ となる. これを解くと.

No. . . ( )

$$\begin{cases} F(s)=\dfrac{-3s+2}{s^2(s+2)} = -\dfrac{2}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s+2} \\ G(s)=\dfrac{4}{s^2(s+2)} = -\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s+2} \\ H(s)=\dfrac{8s+4}{s^2(s+2)} = \dfrac{3}{s}+\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{3}{s+2} \end{cases}$$

となる．これより

$$\begin{cases} f(t)=-2+t+2e^{-2t} \\ g(t)=-1+2t+e^{-2t} \\ h(t)=3+2t-3e^{-2t} \end{cases}$$

となる

2.5 節

1.(1) t でラプラス変換すると.

$$s^2F(x,s) - s\cdot 3\sin 2x = k^2\cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)$$ となる. 境界条件は.

$F(0,s) = F(\pi,s) = 0$ となる.

次に $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s) = A(s)$ として. x でラプラス変換すると.

$$s^2\hat{F}(y,s) - 3s\cdot\frac{2}{y^2+4} = k^2\cdot\left(y^2\cdot\hat{F}(y,s) - A(s)\right)$$ となる. よって.

$$\hat{F}(y,s) = \frac{1}{s^2-k^2y^2}\cdot\left(3s\cdot\frac{2}{y^2+4} - k^2A(s)\right)$$

$$= \frac{3k^2}{s^2+4k^2}\cdot\frac{1}{s-ky} + \frac{3k^2}{s^2+4k^2}\cdot\frac{1}{s+ky} + \frac{6s}{s^2+4k^2}\cdot\frac{1}{y^2+4} - \frac{k^2}{2s}A(s)\left(\frac{1}{s-ky}+\frac{1}{s+ky}\right)$$

となる. これをラプラス逆変換し.

$$F(x,s) = \frac{3k^2}{s^2+4k^2}\left(-\frac{1}{k}e^{\frac{1}{k}x} + \frac{1}{k}e^{-\frac{1}{k}x}\right) + \frac{3s}{s^2+4k^2}\cdot\sin 2x - \frac{k^2}{2s}A(s)\left(-\frac{1}{k}e^{\frac{1}{k}x} + \frac{1}{k}e^{-\frac{1}{k}x}\right)$$

ここで $F(\pi,s) = 0$ より

$$0 = \frac{3k^2}{s^2+4k^2}\left(-\frac{1}{k}e^{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k}e^{-\frac{\pi}{k}}\right) - \frac{k^2}{2s}A(s)\left(-\frac{1}{k}e^{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k}e^{-\frac{\pi}{k}}\right)$$ となり

$\frac{k^2}{2s}A(s) = \frac{3k^2}{s^2+4k^2}$ となる $\therefore$ $F(x,s) = \frac{3s}{s^2+4k^2}\sin 2x$ である.

これをラプラス逆変換し.

$f(x,t) = 3\cdot\cos 2kt\cdot\sin 2x$ となる

No.

(2) tでラプラス変換すると.

$s^2F(x,s)-\sin 4x=k^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)$ となる. 境界条件は.

$F(0,s)=F(\pi,s)=0$ である. $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ として xでラプラス変換すると.

$s^2\hat{F}(y,s)-\frac{4}{y^2+16}=k^2\left(y^2\hat{F}(y,s)-A(s)\right)$ となる. よって.

$\hat{F}(y,s)=\frac{4}{(s^2-k^2y^2)(y^2+16)}-\frac{k^2}{s^2-k^2y^2}A(s)$

$=\frac{4k^2}{s^2+16k^2}\cdot\frac{1}{s^2-k^2y^2}+\frac{4}{s^2+16k^2}\cdot\frac{1}{y^2+16}-\frac{k^2}{s^2-k^2y^2}A(s)$

となる. これを xでラプラス逆変換すれば.

$F(x,s)=-\frac{k}{s}\cdot\frac{4}{s^2+16k^2}\sinh\frac{s}{k}x+\frac{1}{s^2+16k^2}\cdot\sin 4x+\frac{k}{s}\cdot\sinh\frac{s}{k}x\cdot A(s)$

となる. ここで $F(\pi,s)=0$ より

$A(s)=\frac{4}{s^2+16k^2}$ となり.

$F(x,s)=\frac{1}{s^2+16k^2}\sin 4x$ となる これより

$f(x,t)=\frac{1}{4k}\cdot\sin 4kt\cdot\sin 4x$ となる.

2.(1) tでラプラス変換し.

$sF(x,s)-e^x=\frac{\partial F}{\partial x}(x,s)$, $F(0,s)=\frac{1}{s-1}$ となる.

これを xでラプラス変換すると.

$s\hat{F}(y,s)-\frac{1}{y-1}=y\hat{F}(y,s)-\frac{1}{s-1}$ となり,

$$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-y}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{(y-1)(s-1)}$$ となる.

$\therefore\ F(x,s)=e^{x}\cdot\frac{1}{s-1}$, $f(x,t)=e^{x}\cdot e^{t}=e^{x+t}$ となる.

(2) tでラプラス変換し.

$sF(x,s)-\cos x=\frac{\partial F}{\partial x}(x,s)$, $F(0,s)=\frac{s}{s^2+1}$ となる.

これをxでラプラス変換し.

$s\hat{F}(y,s)-\frac{y}{y^2+1}=y\hat{F}(y,s)-\frac{s}{s^2+1}$ となり.

$$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-y}\left(\frac{y}{y^2+1}-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{ys-1}{(y^2+1)(s^2+1)}.$$ これより.

$F(x,s)=\cos x\cdot\frac{s}{s^2+1}-\sin x\cdot\frac{1}{s^2+1}$ となる.

$\therefore\ f(x,t)=\cos x\cdot\cos t-\sin x\cdot\sin t$ である.

(3). tでラプラス変換し.

$sF(x,s)-\sin x=k^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)$, $F(0,s)=F(\pi,s)=0$ となる

これをxでラプラス変換する. $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ としておくと.

$s\hat{F}(y,s)-\frac{1}{y^2+1}=k^2\left(y^2\cdot\hat{F}(y,s)-A(s)\right)$ となり

$$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-k^2y^2}\cdot\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{s-k^2y^2}\cdot A(s)$$

$$=\frac{1}{s+k^2}\cdot\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{s+k^2}\cdot\frac{1}{s-k^2y^2}-\frac{1}{s-k^2y^2}A(s)$$ となる

これより.

$F(x,s)=\frac{1}{s+k^2}\sin x-\frac{k}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s+k^2}\sinh\frac{\sqrt{s}}{k}x+\frac{k}{\sqrt{s}}\sinh\frac{\sqrt{s}}{k}x\cdot A(s)$ となる.

$F(\pi,s)=0$ より $A(s)=\frac{1}{s+k^2}$ となり.

$F(x,s)=\frac{1}{s+k^2}\sin x$, $f(t,s)=e^{-k^2t}\cdot\sin x$ となる.

(4) tでラプラス変換し.

$s^2F(x,s)-\sin 3x+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)=0$, $F(0,s)=F(\pi,s)=0$ である

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ として, xでラプラス変換すると.

$s^2\hat{F}(y,s)-\frac{3}{y^2+9}+y^2\hat{F}(y,s)-A(s)=0$ これより

$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s^2+y^2}\cdot\frac{3}{y^2+9}+\frac{1}{s^2+y^2}A(s)$

$=\frac{3}{s^2-9}\left(\frac{1}{y^2+9}-\frac{1}{y^2+s^2}\right)+\frac{1}{s^2+y^2}A(s)$ となる.

これを xでラプラス逆変換し.

$F(x,s)=\frac{3}{s^2-9}\left(\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{s}\sin sx\right)+\frac{1}{s}\sin sx\cdot A(s)$ となるが.

$F(\pi,s)=0$ より $A(s)=\frac{3}{s^2-9}$ となり.

$F(x,s)=\frac{1}{s^2-9}\cdot\sin 3x=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+3}\right)\sin 3x$ となる

$\therefore f(x,t)=\frac{1}{6}(e^{3t}-e^{-3t})\sin 3x$ である