2.5 節

1.(1) t でラプラス変換すると．

$$s^2 F(x,s) - s \cdot 3\sin 2x = k^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)$$ となる．境界条件は．

$$F(0,s) = F(\pi,s) = 0$$ となる．

次に $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s) = A(s)$ として．x でラプラス変換すると．

$$s^2 \hat{F}(y,s) - 3s \cdot \frac{2}{y^2+4} = k^2 \cdot \left(y^2 \cdot \hat{F}(y,s) - A(s) \right)$$ となる．よって．

$$\hat{F}(y,s) = \frac{1}{s^2 - k^2 y^2} \cdot \left(3s \cdot \frac{2}{y^2+4} - k^2 A(s) \right)$$

$$= \frac{3k^2}{s^2+4k^2} \cdot \frac{1}{s-ky} + \frac{3k^2}{s^2+4k^2} \cdot \frac{1}{s+ky} + \frac{6s}{s^2+4k^2} \cdot \frac{1}{y^2+4} - \frac{k^2}{2s} A(s) \left(\frac{1}{s-ky} + \frac{1}{s+ky} \right)$$

となる．これをラプラス逆変換し．

$$F(x,s) = \frac{3k^2}{s^2+4k^2} \left(-\frac{1}{k} e^{\frac{1}{k}x} + \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}x} \right) + \frac{3s}{s^2+4k^2} \sin 2x - \frac{k^2}{2s} A(s) \left(-\frac{1}{k} e^{\frac{1}{k}x} + \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k}x} \right)$$

ここで $F(\pi,s) = 0$ より

$$0 = \frac{3k^2}{s^2+4k^2} \left(-\frac{1}{k} e^{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k} e^{-\frac{\pi}{k}} \right) - \frac{k^2}{2s} A(s) \left(-\frac{1}{k} e^{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k} e^{-\frac{\pi}{k}} \right)$$ となり

$$\frac{k^2}{2s} A(s) = \frac{3k^2}{s^2+4k^2}$$ となる　$\therefore$ $F(x,s) = \frac{3s}{s^2+4k^2} \sin 2x$ である．

これをラプラス逆変換し．

$$f(x,t) = 3 \cdot \cos 2kt \cdot \sin 2x$$ となる

(2) tでラプラス変換すると.

$$s^2F(x,s)-\sin 4x=k^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,s)$$ となる. 境界条件は.

$F(0,s)=F(\pi,s)=0$ である. $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ としてxでラプラス変換すると.

$$s^2\hat{F}(y,s)-\frac{4}{y^2+16}=k^2\left(y^2\hat{F}(y,s)-A(s)\right)$$ となる. よって.

$$\hat{F}(y,s)=\frac{4}{(s^2-k^2y^2)(y^2+16)}-\frac{k^2}{s^2-k^2y^2}A(s)$$

$$=\frac{4k^2}{s^2+16k^2}\cdot\frac{1}{s^2-k^2y^2}+\frac{4}{s^2+16k^2}\cdot\frac{1}{y^2+16}-\frac{k^2}{s^2-k^2y^2}A(s)$$

となる. これをxでラプラス逆変換すれば.

$$F(x,s)=-\frac{k}{s}\cdot\frac{4}{s^2+16k^2}\sinh\frac{s}{k}x+\frac{1}{s^2+16k^2}\cdot\sin 4x+\frac{k}{s}\cdot\sinh\frac{s}{k}x\cdot A(s)$$

となる. ここで $F(\pi,s)=0$ より

$$A(s)=\frac{4}{s^2+16k^2}$$ となり.

$$F(x,s)=\frac{1}{s^2+16k^2}\sin 4x$$ となる これより

$$f(x,t)=\frac{1}{4k}\cdot\sin 4kt\cdot\sin 4x$$ となる.

2.(1) tでラプラス変換し.

$$sF(x,s)-e^x=\frac{\partial F}{\partial x}(x,s),\quad F(0,s)=\frac{1}{s-1}$$ となる.

これをxでラプラス変換すると.

$$s\hat{F}(y,s)-\frac{1}{y-1}=y\hat{F}(y,s)-\frac{1}{s-1}$$ となり,

$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-y}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{1}{(y-1)(s-1)}$ となる.

$\therefore\ F(x,s)=e^x\cdot\frac{1}{s-1}$, $f(x,t)=e^x\cdot e^t=e^{x+t}$ となる.

(2) tでラプラス変換し.

$sF(x,s)-\cos x=\frac{\partial F}{\partial x}(x,s)$, $F(0,s)=\frac{s}{s^2+1}$ となる.

これをxでラプラス変換し.

$s\hat{F}(y,s)-\frac{y}{y^2+1}=y\hat{F}(y,s)-\frac{s}{s^2+1}$ となり.

$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-y}\left(\frac{y}{y^2+1}-\frac{s}{s^2+1}\right)=\frac{ys-1}{(y^2+1)(s^2+1)}$. これより.

$F(x,s)=\cos x\cdot\frac{s}{s^2+1}-\sin x\cdot\frac{1}{s^2+1}$ となる.

$\therefore\ f(x,t)=\cos x\cdot\cos t-\sin x\cdot\sin t$ である.

(3). tでラプラス変換し.

$sF(x,s)-\sin x=k^2\cdot\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(x,s)$, $F(0,s)=F(\pi,s)=0$ となる

これをxでラプラス変換する. $\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ としておくと.

$s\hat{F}(y,s)-\frac{1}{y^2+1}=k^2\left(y^2\cdot\hat{F}(y,s)-A(s)\right)$ となり

$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s-k^2y^2}\cdot\frac{1}{y^2+1}-\frac{1}{s-k^2y^2}\cdot A(s)$

$=\frac{1}{s+k^2}\cdot\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{s+k^2}\cdot\frac{1}{s-k^2y^2}-\frac{1}{s-k^2y^2}A(s)$ となる

これより.

$F(x,s)=\frac{1}{s+k^2}\sin x-\frac{k}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s+k^2}\sinh\frac{\sqrt{s}}{k}x+\frac{k}{\sqrt{s}}\sinh\frac{\sqrt{s}}{k}x\cdot A(s)$ となる.

$F(\pi,s)=0$ より $A(s)=\frac{1}{s+k^2}$ となり.

$F(x,s)=\frac{1}{s+k^2}\sin x$, $f(t,s)=e^{-k^2t}\cdot\sin x$ となる.

(4) tでラプラス変換し.

$s^2F(x,s)-\sin 3x+\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(x,s)=0$, $F(0,s)=F(\pi,s)=0$ である

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,s)=A(s)$ として、xでラプラス変換すると.

$s^2\hat{F}(y,s)-\frac{3}{y^2+9}+y^2\cdot\hat{F}(y,s)-A(s)=0$ これより

$\hat{F}(y,s)=\frac{1}{s^2+y^2}\cdot\frac{3}{y^2+9}+\frac{1}{s^2+y^2}A(s)$

$=\frac{3}{s^2-9}\left(\frac{1}{y^2+9}-\frac{1}{y^2+s^2}\right)+\frac{1}{s^2+y^2}A(s)$ となる.

これをxでラプラス逆変換し.

$F(x,s)=\frac{3}{s^2-9}\left(\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{s}\sin sx\right)+\frac{1}{s}\sin sx\cdot A(s)$ となるが.

$F(\pi,s)=0$ より $A(s)=\frac{3}{s^2-9}$ となり.

$F(x,s)=\frac{1}{s^2-9}\cdot\sin 3x=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+3}\right)\sin 3x$ となる

$\therefore f(x,t)=\frac{1}{6}(e^{3t}-e^{-3t})\sin 3x$ である