

2.4.3節

1. (1) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s) - 1 + G(s) = 0 \\ sG(s) - 2 - F(s) = 0 \end{cases}$$

となる. これを解けば.

$$F(s) = \frac{s-2}{s^2+1}, \quad G(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} \quad \text{となる. これらをラプラス逆変換し.}$$

$$f(t) = \cos t - 2\sin t, \quad g(t) = 2\cos t + \sin t \quad \text{を得る.}$$

(2) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} sF(s) - 4 - 3G(s) = 0 \\ sG(s) - 2 - 3F(s) = 0 \end{cases}$$

となる. $G(s)$ を消去すると.

$$F(s) = \frac{4s+6}{s^2-9} = \frac{3}{s-3} + \frac{1}{s+3} \quad \text{となり}$$

$$f(t) = 3e^{3t} + e^{-3t} \quad \text{となる. これをもとの方程式の第1式に代入し.}$$

$$g(t) = 3e^{3t} - e^{-3t} \quad \text{となる.}$$

(3) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s) + sG(s) - 1 = 0 \\ F(s) - sG(s) + 1 = 0 \end{cases}$$

となる. これを解いて

$$F(s) = 0, \quad G(s) = \frac{1}{s} \quad \text{となる.}$$

$$\therefore f(t) = 0, \quad g(t) = 1.$$

(4) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s) + 3G(s) = \frac{2}{s} \\ sG(s) - 2F(s) = \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

となる. $F(s)$ を消去すると.

$$G(s) = \frac{5}{s(s^2+6)} = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+6} \right) \quad \text{より}$$

$$g(t) = \frac{5}{6} (1 - \cos\sqrt{6}t) \quad \text{となる. これを第2式に代入し.}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{5\sqrt{6}}{6} \sin\sqrt{6}t - t \right) = \frac{5\sqrt{6}}{12} \sin\sqrt{6}t - \frac{1}{2}t \quad \text{となる.}$$

2.(1) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} s^2 F(s) - 1 + G(s) = 0 \\ s^2 G(s) - 1 + F(s) = 0 \end{cases}$$

となる. これを解いて.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{となる} \quad \therefore f(t) = \sin t, \quad g(t) = \sin t.$$

(2) ラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sF(s) - 1 + G(s) - H(s) = 0 \\ F(s) + sG(s) - 1 + H(s) = 0 \\ F(s) + G(s) + sH(s) - 1 = 0 \end{cases}$$

となる. これを解いて.

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad G(s) = H(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s} \quad \text{となる}$$

$$\therefore f(t) = 1, \quad g(t) = h(t) = 2e^{-t} - 1 \quad \text{となる.}$$

(3) ラプラス変換し.

$$\begin{cases} sF(s) + G(s) - H(s) = -\frac{3}{s} \\ 4F(s) + 7sG(s) - 2H(s) = 0 \\ 4F(s) - 2G(s) - sH(s) = -\frac{8}{s} \end{cases}$$

となる. これを解くと.

$$F(s) = \frac{-3s+2}{s^2(s+2)} = -\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+2}$$

$$G(s) = \frac{4}{s^2(s+2)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}$$

kᵗᵃᵛ. ᵛᵗᵃᵛ

$$H(s) = \frac{8s+4}{s^2(s+2)} = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s+2}$$

$$f(t) = -2 + t + 2e^{-2t}$$

$$g(t) = -1 + 2t + e^{-2t}$$

kᵗᵃᵛ

$$h(t) = 3 + 2t - 3e^{-2t}$$