2.4.2節

1.(1) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$s^2F(s)-a+4sF(s)+5F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{a}{s^2+4s+5}=\dfrac{a}{(s+2)^2+1}$ となり

$f(t)=a\cdot e^{-2t}\cdot\sin t$ となる. ここで $f(\frac{\pi}{2})=1$ より

$1=a\cdot e^{-\pi}\cdot 1$ となり, $a=e^{\pi}$. $\therefore f(t)=e^{\pi-2t}\cdot\sin t$.

(2) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$s^2F(s)-a-5sF(s)+4F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{a}{s^2-5s+4}=\dfrac{a}{(s-4)(s-1)}=\dfrac{a}{3}\left(\dfrac{1}{s-4}-\dfrac{1}{s-1}\right)$ となり

$f(t)=\dfrac{a}{3}(e^{4t}-e^{t})$ となる. ここで $f(1)=1$ より

$1=\dfrac{a}{3}\cdot(e^4-e)$ $\therefore a=\dfrac{3}{e^4-e}$ これより. $f(t)=\dfrac{e^{4t}-e^{t}}{e^4-e}$

(3) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$6s^2F(s)-6a+11sF(s)-10F(s)=0$ より

$F(s)=\dfrac{6a}{6s^2+11s-10}=\dfrac{6a}{(2s+5)(3s-2)}=\dfrac{6}{19}a\left(\dfrac{3}{3s-2}-\dfrac{2}{2s+5}\right)$

$=\dfrac{6}{19}a\left(\dfrac{1}{s-\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{s+\frac{5}{2}}\right)$ となり

$f(t)=\dfrac{6}{19}a\left(e^{\frac{2}{3}t}-e^{-\frac{5}{2}t}\right)$ となる. ここで $f(1)=1$ より

$1=\dfrac{6}{19}a\cdot(e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}})$ $\therefore a=\dfrac{19}{6}(e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}})$ $\therefore f(t)=\dfrac{e^{\frac{2}{3}t}-e^{-\frac{5}{2}t}}{e^{\frac{2}{3}}-e^{-\frac{5}{2}}}$

(4) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-3s-a+4sF(s)-12+6F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{3s+12+a}{s^2+4s+6}=\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+2}+\frac{a+6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2+2}$$ となり

$$f(t)=3e^{-2t}\cos\sqrt{2}t+\frac{a+6}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\sqrt{2}t$$ となる.

ここで $f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=3$ より. $3=\frac{a+6}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$ となり

$\frac{a+6}{\sqrt{2}}=3e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$ $\therefore f(t)=3e^{-2t}\left(\cos\sqrt{2}t+e^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\sin\sqrt{2}t\right)$ を得る.

2. (1) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-a-4sF(s)+3F(s)=\frac{3}{s}$$ より

$$F(s)=\frac{a}{s^2-4s+3}+\frac{3}{s(s^2-4s+3)}$$

$$=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s}-\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s-3}\right)$$ となり

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(2+(a+1)e^{3t}-(a+3)e^{t}\right)$$ となる.

ここで $f(1)=1$ より $1=1+\frac{1}{2}(a+1)e^3-\frac{1}{2}(a+3)e$ となり

$a=\frac{3e-e^3}{e^3-e}$ $\therefore f(t)=1+\frac{1}{e^2-e}e^{3t}-\frac{1}{e^2-e}e^{t+2}$ を得る.

(2) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-s-a-3sF(s)+3=\frac{1}{s^2}$$ より

$$F(s)=\frac{s+a-3}{s^2-3s}+\frac{1}{s^4-3s^3}=\frac{1}{s}+\frac{a}{s(s-3)}+\frac{1}{s^3(s-3)}$$

$$=\frac{1}{s}+\frac{a}{3}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s}-\frac{3}{s^2}-\frac{9}{s^3}\right)$$ となり

$$f(t)=1+\frac{a}{3}\left(e^{3t}-1\right)+\frac{1}{27}\left(e^{3t}-1-3t-\frac{9}{2}t^2\right)$$ となる.

ここで $f(1)=1$ より.

$$1=1+\frac{a}{3}(e^3-1)+\frac{1}{27}\left(e^3-1-3-\frac{9}{2}\right)$$

$$\frac{a}{3}(e^3-1)=\frac{1}{27}\left(\frac{17}{2}-e^3\right) \qquad \therefore \frac{a}{3}=\frac{1}{54}\cdot\frac{17-2e^3}{e^3-1}$$ となり

$$f(t)=1+\frac{1}{54}\frac{17-2e^3}{e^3-1}(e^{3t}-1)+\frac{1}{27}\left(e^{3t}-1-3t-\frac{9}{2}t^2\right)$$

$$=1-\frac{1}{9}t-\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{54}(e^{3t}-1)\cdot\frac{17-2e^3+2(e^3-1)}{e^3-1}$$

$$=1-\frac{1}{9}t-\frac{1}{6}t^2+\frac{5(e^{3t}-1)}{18(e^3-1)}$$ を得る.

(3) $f'(0)=a$ としてラプラス変換すると.

$$s^2F(s)-a-2sF(s)+F(s)=\frac{1}{s^2+1}$$ より

$$F(s)=\frac{a}{s^2-2s+1}+\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2+1)}$$

$$=\frac{a}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$$ となり

$$f(t)=a\cdot te^t+\frac{1}{2}(\cos t+te^t-e^t)$$ となる. ここで $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ より

$$0=a\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}\right) \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore f(t)=\frac{1}{\pi}te^t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}e^t$$ を得る.