2.4.1節

1. (1) 両辺をラプラス変換すると

$$s^2F(s)-1-3sF(s)+2F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{1}{s^2-3s+2}=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}$$

となる．この両辺をラプラス逆変換し， 部分分数分解をしているが．詳細は省略．

$$f(t)=e^{2t}-e^{t}$$ を得る．

(2) ラプラス変換すると．

$$2(s^2F(s)-3)-5sF(s)+2F(s)=0$$ より．

$$F(s)=\frac{6}{2s^2-5s+2}=\frac{6}{(s-2)(2s-1)}=2\left(\frac{1}{s-2}-\frac{2}{2s-1}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)$$ となり． $f(t)=2(e^{2t}-e^{\frac{t}{2}})$ を得る．

(3) ラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-2-6sF(s)+9F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{2}{s^2-6s+9}=\frac{2}{(s-3)^2}=2\cdot L(t)(s-3)=L(2te^{3t})$$ となり

$$f(t)=2te^{3t}$$ を得る．

(4) ラプラス変換すると．

$$s^2F(s)-s-2-4(sF(s)-1)+5F(s)=0$$ より

$$F(s)=\frac{s-2}{s^2-4s+5}=\frac{s-2}{(s-2)^2+1}=L(\cos t)(s-2)$$ となり

$$f(t)=e^{2t}\cdot\cos t$$ を得る．

2.(1) ラプラス変換すると.

$$s^2F(s) - 2sF(s) + 3F(s) = \frac{1}{s}$$ より

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2-2s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-2}{s^2-2s+3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-1}{(s-1)^2+2} + \frac{1}{(s-1)^2+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{s-1}{(s-1)^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{(s-1)^2+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(L(1) - L(\cos\sqrt{2}t)(s-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}L(\sin\sqrt{2}t)(s-1)\right)$$ となり,

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^t\cdot\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{3\sqrt{2}}e^t\sin\sqrt{2}t$$

$$= \frac{1}{6}\left(2 - e^t(2\cos\sqrt{2}t) - \sqrt{2}e^t\sin\sqrt{2}t)\right)$$ を得る.

(2) ラプラス変換すると.

$$s^2F(s) - s - (sF(s) - 1) = \frac{1}{s^2+1}$$ より

$$F(s) = \frac{1}{s^2-s}\left(\frac{1}{s^2+1} + s - 1\right) = \frac{1}{s^2-s}\left(\frac{s^3+s-s^2-1+1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{s^2-s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

となり, $f(t) = \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t)$ を得る.

(3) ラプラス変換すると.

$$s^3F(s) + 2s^2F(s) - 11sF(s) - 12F(s) = \frac{4}{s}$$ より

$$F(s) = \frac{4}{s}\cdot\frac{1}{s^3+2s^2-11s-12} = \frac{4}{s(s+1)(s-3)(s+4)}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{21(s-3)} - \frac{1}{21(s+4)}$$ となり

$f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{21}e^{3t} - \frac{1}{21}e^{-4t}$ を得る.

(4) ラプラス変換すると

$$s^2F(s) - 2s - 2(sF(s) - 2) + 5F(s) = \frac{8s}{s^2-1}$$ より

$$F(s) = \frac{1}{s^2-2s+5}\left(\frac{8s}{s^2-1} + 2s - 4\right) = \frac{2s^3-4s^2+6s+4}{(s^2-2s+5)(s^2-1)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{s^2-2s+5} + \frac{3s+1}{s^2-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4} - \frac{2}{(s-1)^2+4} + 3\cdot\frac{s}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1}\right)$$ となり

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t\cdot\cos 2t - e^t\sin 2t + 3\cosh t + \sinh t\right)$$ を得る.

(別解).

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s-3}{s^2-2s+5} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right)$$ より

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(e^t\cos 2t - e^t\sin 2t + 2e^t + e^{-t}\right)$$ としてもよい.