問題1.1

$\boxed{1}$ (1) 1階常微分方程式 (2) 2階偏微分方程式 (3) 1階偏微分方程式

(4) 3階常微分方程式 (5) 2階常微分方程式 (6) 4階偏微分方程式

$\boxed{2}$ (1) $y=C\cos x$ $\therefore y'=-C\sin x$. よって $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{-C\sin x}{C\cos x}=-\tan x$ $\therefore y'+y\tan x=0$.

$1=y(0)=C\cdot\cos 0=C$ $\therefore C=1$ $\therefore y=\cos x$

(2) $\sin y=x-1+Ce^{-x}$ の両辺を x について微分すると. $y'\cos y=1-Ce^{-x}$. よって.

$\sin y=x-(1-Ce^{-x})=x-y'\cos y$ $\therefore y'\cos y+\sin y=x$ $\therefore y'+\tan y=\dfrac{x}{\cos y}$.

$x=0$ のとき $y=\dfrac{\pi}{6}$ であるから. $\sin\dfrac{\pi}{6}=0-1+C$ $\therefore C=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ $\therefore \sin y=x-1+\dfrac{3}{2}e^{-x}$

(3) $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2C(t-1)}{(t-1)^4}=-\dfrac{2C}{(t-1)^3}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2Ct(t-1)^2-Ct^2\cdot 2(t-1)}{(t-1)^4}$

$=\dfrac{2Ct(t-1)-2Ct^2}{(t-1)^3}=\dfrac{2Ct^2-2Ct-2Ct^2}{(t-1)^3}=\dfrac{-2Ct}{(t-1)^3}$

$\therefore y'=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-2Ct}{(t-1)^3}\cdot\left(-\dfrac{(t-1)^3}{2C}\right)=t$ $\therefore x(y')^2-(y')^2=xt^2-t^2=t^2(x-1)$

$=t^2\cdot\dfrac{C}{(t-1)^2}=y$ $\therefore y=x(y')^2-(y')^2$.

$x=1+\dfrac{C}{(t-1)^2}$

$x=0$ のとき $y=0$ とする. このとき. $0=1+\dfrac{C}{(t-1)^2}$ $\therefore C=-(t-1)^2$.

$\therefore y=\dfrac{t^2}{(t-1)^2}\left(-(t-1)^2\right)=-t^2$. $y=0$ であるから $t=0$ $\therefore C=-1$. よって

$$\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{(t-1)^2} \\ y=\dfrac{-t^2}{(t-1)^2} \end{cases}$$

(4) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. $y'=C_1e^x-C_2e^{-x}$. $y''=C_1e^x+C_2e^{-x}=y$ $\therefore y''-y=0$

$y(0)=C_1+C_2=0$, $y(1)=C_1e+C_2e^{-1}=1$ $\therefore C_2=-C_1$. $\therefore \dfrac{C_1e^2-C_1}{e}=1$

$c_1 = \frac{e}{e^2-1}$ ∴ $c_2 = -\frac{e}{e^2-1}$ ∴ $y = \frac{e}{e^2-1}(e^{x} - e^{-x})$

$\boxed{3}$ (1) $cy = x + \frac{c^2}{2}$ ∴ $cy' = 1$ ∴ $c = \frac{1}{y'}$ ∴ $\frac{y}{y'} = x + \frac{1}{2(y')^2}$

∴ $2yy' = 2x(y')^2 + 1$

(2) $\tan(x+c) = \frac{y}{x}$ ∴ $x + c = \tan^{-1}\frac{y}{x}$. 両辺をxで微分すると

$$1 = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}$$ ∴ $xy' - y = x^2 + y^2$

(3) $y = x^c$ ∴ $\log y = c\log x$ ∴ $c = \frac{\log y}{\log x}$. 両辺をxで微分すると

$$0 = \frac{\frac{1}{y}y'\log x - (\log y)\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$ ∴ $\frac{y'}{y}\log x = \frac{\log y}{x}$ ∴ $y'\cdot x\log x = y\log y$

(4) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{2x}$

$y' = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}$

∴ $y' - y = c_2 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ ∴ $c_2(1+x) = e^{-2x}(y'-y)$ ……①

①の両辺をxで微分

$$c_2 = -2e^{-2x}(y'-y) + e^{-2x}(y''-y') = e^{-2x}(-2y'+2y+y''-y') = e^{-2x}(y''-3y'+2y)$$

これを①に代入

$(1+x)\cancel{e^{-2x}}(y''-3y'+2y) = \cancel{e^{-2x}}(y'-y)$ ∴ $y''-3y'+2y+xy''-3xy'+2xy-y'+y=0$

∴ $(1+x)y'' - (3x+4)y' + (2x+3)y = 0$

(5) $y = \frac{1}{c_1x+c_2} + 1$ ∴ $y - 1 = \frac{1}{c_1x+c_2}$ ∴ $y' = -\frac{c_1}{(c_1x+c_2)^2} = -c_1(y-1)^2$

∴ $\frac{y'}{(y-1)^2} = -c_1$ 両辺をxで微分:

$$\frac{y''(y-1)^2-y'\cdot 2(y-1)y'}{(y-1)^4}=0 \quad \therefore y''(y-1)^2-2(y')^2(y-1)=0$$

$$\therefore (y-1)y''-2(y')^2=0$$

(6) $c_1x^2+c_2y^2=1 \quad \therefore 2c_1x+2c_2y\cdot y'=0 \cdots ①$

$$\therefore 2c_1+2c_2\{(y')^2+y\cdot y''\}=0 \cdots ②$$

$②\times x$: $2c_1x+2c_2\{x(y')^2+xy\cdot y''\}=0 \cdots ②'$

$②'-①$: $2c_2\{x(y')^2+xy\cdot y''\}-2c_2yy'=0 \quad \therefore x(y')^2+xyy''=yy'$

問題1.2.1

1 (1) $x\dfrac{dy}{dx}=-(y+1)$ $\therefore \dfrac{dy}{y+1}=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \log(y+1)=-\log x+c=\log\dfrac{e^c}{x}$

$\therefore y+1=\dfrac{e^c}{x}$ $\therefore \underline{y=\dfrac{c}{x}-1}$

(2) $(y+1)\dfrac{dy}{dx}=1-x$ $\therefore (y+1)dy=(1-x)dx$ $\therefore \dfrac{1}{2}(y+1)^2=x-\dfrac{x^2}{2}+c$

$\therefore (y+1)^2=2x-x^2+2c$ $\therefore \underline{(y+1)^2=2x-x^2+c}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=(\tan y)(\tan x)$ $\therefore \dfrac{dy}{\tan y}=\tan x\,dx$ $\therefore \dfrac{\cos y}{\sin y}dy=\dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$\therefore \displaystyle\int\dfrac{\cos y}{\sin y}dy=\int\dfrac{\sin x}{\cos x}dx+c$ $\therefore \log\sin y=-\log\cos x+c=\log\dfrac{e^c}{\cos x}$

$\therefore \sin y=\dfrac{e^c}{\cos x}$ $\therefore \underline{\sin y=\dfrac{c}{\cos x}}$

(4) $xy(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ $\therefore \dfrac{y}{1+y^2}dy=\dfrac{dx}{x(1+x^2)}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\log(1+y^2)=\displaystyle\int\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1+x^2}\right)dx+c=\log x-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)+c=\log\dfrac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \log\sqrt{1+y^2}=\log\dfrac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\therefore \sqrt{1+y^2}=\dfrac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\therefore 1+y^2=\dfrac{(e^c)^2x^2}{1+x^2}$

$\therefore (1+x^2)(1+y^2)=e^{2c}\cdot x^2$ $\therefore \underline{(1+x^2)(1+y^2)=cx^2}$

(5) $(1+x)y+2(1-y)x\dfrac{dy}{dx}=0$ $\therefore 2(y-1)x\dfrac{dy}{dx}=(x+1)y$

$\therefore \dfrac{y-1}{y}dy=\dfrac{x+1}{2x}dx$ $\therefore \left(1-\dfrac{1}{y}\right)dy=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \displaystyle\int\left(1-\dfrac{1}{y}\right)dy=\dfrac{1}{2}\int\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx+c$ $\therefore y-\log y=\dfrac{1}{2}(x+\log x)+c$

$\therefore 2y-2\log y=x+\log x+2c$ $\therefore \log xy^2=2y-x-2c$ $\therefore xy^2=e^{2y-x-2c}$

$\therefore xy^2=e^{-2c}\cdot e^{2y-x}$ $\therefore \underline{xy^2=ce^{2y-x}}$

(6) $y\dfrac{dy}{dx}=xe^{x^2}\cdot e^{y^2}$ $\therefore ye^{-y^2}dy=xe^{x^2}dx$ $\therefore \displaystyle\int ye^{-y^2}dy=\int xe^{x^2}dx+c$

$\therefore -\dfrac{e^{-y^2}}{2}=\dfrac{e^{x^2}}{2}+c$ $\therefore -e^{-y^2}=e^{x^2}+2c$ $\therefore \underline{e^{x^2}+e^{-y^2}=c}$

(7) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ ∴ $\dfrac{dy}{y^2-1}=-\dfrac{dx}{x^2-1}$

∴ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+c$

∴ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{y-1}{y+1}=-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x-1}{x+1}+c$ ∴ $\log\dfrac{y-1}{y+1}=\log e^{2c}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

∴ $\dfrac{y-1}{y+1}=e^{c}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ ∴ $\dfrac{y-1}{y+1}=c\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ ∴ $(y-1)(x-1)=c(x+1)(y+1)$

∴ $xy-y-x+1=c(xy+x+y+1)=cxy+cx+cy+c$

∴ $xy-y-cxy-cy=cx+c+x-1$ ∴ $\{(1-c)x-(1+c)\}y=(c+1)x+(c-1)$

∴ $y=\dfrac{(1+c)x-(1-c)}{(1-c)x-(1+c)}=\dfrac{x-\frac{1-c}{1+c}}{\frac{1-c}{1+c}x-1}$ ∴ $y=\dfrac{x-c}{cx-1}$

(8) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c$

∴ $\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=c$ ここで. $u=\sin^{-1}x$, $v=\sin^{-1}y$ とおくと. $x=\sin u$, $y=\sin v$.

∴ $\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

∴ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin c$ ∴ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$

$\boxed{2}$ (1) $u=y-x$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=y'-1$ ∴ $1+\dfrac{du}{dx}=u^2$ ∴ $\dfrac{du}{u^2-1}=dx$

∴ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{u-1}{u+1}=x+c$ ∴ $\log\dfrac{u-1}{u+1}=2x+2c=\log e^{2c}\cdot e^{2x}$ ∴ $\dfrac{u-1}{u+1}=e^{2c}\cdot e^{2x}$

∴ $\dfrac{u-1}{u+1}=c_1e^{2x}$ ∴ $\dfrac{y-x-1}{y-x+1}=c_1e^{2x}$ ∴ $y-x-1=c_1e^{2x}y-c_1xe^{2x}+c_1e^{2x}$

∴ $(1-c_1e^{2x})y=x+1-c_1xe^{2x}+c_1e^{2x}$

∴ $(1-c_1e^{2x})y=x(1-c_1e^{2x})+1+c_1e^{2x}$ ∴ $y=x+\dfrac{1+c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}}$

∴ $y=x+\dfrac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$

(2) $u = x + e^y$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 1 + e^y \cdot y'$ $\therefore \dfrac{du}{dx} - 1 = u - 1$ $\therefore \dfrac{du}{dx} = u$ $\therefore \dfrac{du}{u} = dx$

$\therefore \log u = x + c = \log e^c\, e^x$ $\therefore u = e^c \cdot e^x$ $\therefore u = c \cdot e^x$ $\therefore x + e^y = c e^x$

$\therefore e^y = c e^x - x$ $\therefore \underline{y = \log(c e^x - x)}$

(3) $u = xy$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = y + xy'$ $\therefore xy' = \dfrac{du}{dx} - y$

$\therefore y' = \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{x^2}$

$\therefore (1-u)\left\{\dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{x^2}\right\} = y^2$ $\therefore (1-u)\dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{u(1-u)}{x^2} = y^2$

$\therefore x(1-u)\dfrac{du}{dx} - u(1-u) = u^2$ $\therefore x(1-u)\dfrac{du}{dx} = u$ $\therefore \left(\dfrac{1}{u} - 1\right)du = \dfrac{dx}{x}$

$\therefore \log u - u = \log x + c$ $\therefore \log \dfrac{u}{x} = u + c$ $\therefore \log y = xy + c$ $\therefore y = e^{xy+c} = e^c \cdot e^{xy}$

$\therefore \underline{y = c e^{xy}}$

(4) $u = x - y$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 1 - y'$ $\therefore -\dfrac{du}{dx} = u \tan x$ $\therefore \dfrac{du}{u} = -\tan x\, dx$

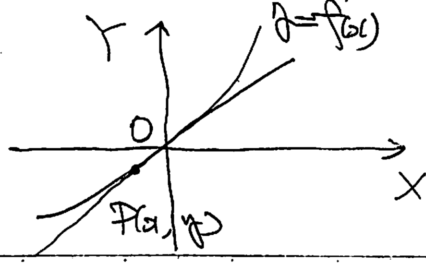
$\therefore \dfrac{du}{u} = \dfrac{-\sin x}{\cos x}dx$ $\therefore \log u = \log \cos x + c = \log e^c \cdot \cos x$ $\therefore u = e^c \cdot \cos x$

$\therefore u = c \cdot \cos x$ $\therefore x - y = c\cos x$ $\therefore \underline{y = x - c\cos x}$

$\boxed{3}$ $u = ax + by + c$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = a + by'$ $\therefore y' = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{du}{dx} - a\right)$

$\therefore \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{du}{dx} - a\right) = f(u)$ $\therefore \dfrac{du}{dx} = bf(u) + a$ ← x と u について変数分離形

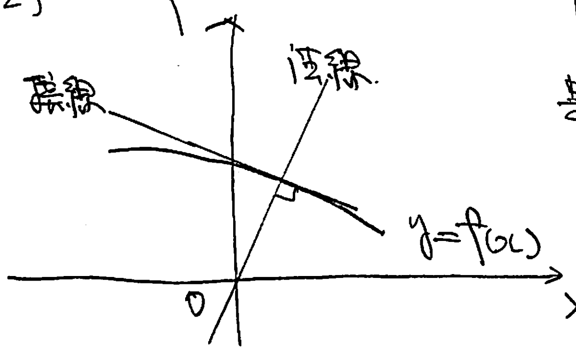
$\boxed{4}$ (1) 求める曲線を $y = f(x)$ とする　接線の方程式：$Y - y = \dfrac{dy}{dx}(X - x)$



題意より $0 - y = \dfrac{dy}{dx}(0 - x)$ $\therefore x\dfrac{dy}{dx} = y$ $\therefore \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$

$\therefore \log y = \log x + c = \log e^c \cdot x$ $\therefore y = e^c \cdot x$ $\therefore \underline{y = cx}$

(2)



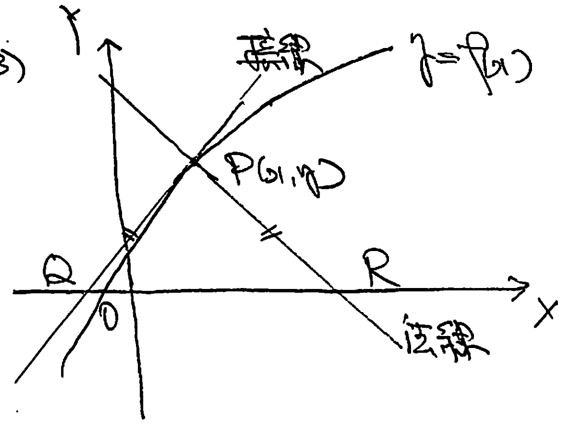
法線の方程式 $Y-y=-\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$

題意より $0-y=-\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}(0-x)$ $\therefore y\dfrac{dy}{dx}=-x$

$\therefore ydy=-xdx$ $\therefore \dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+c$

$\therefore x^2+y^2=2c$ $\therefore x^2+y^2=c$

(3)



接線の方程式: $Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)$

Qの座標: $\left(x-\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}},\ y\right)$

法線の方程式: $Y-y=-\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$

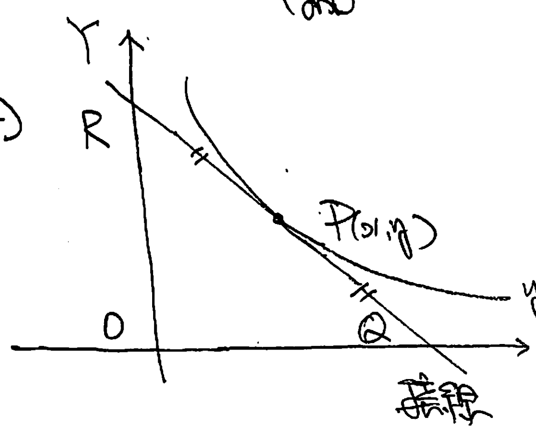
Rの座標 $\left(x+\dfrac{dy}{dx}y,\ y\right)$

$\therefore \overline{PQ}^2=\left\{x-\left(x-\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}}\right)\right\}^2+y^2=\dfrac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+y^2$

$\overline{PR}^2=\left\{x-\left(x+\dfrac{dy}{dx}\cdot y\right)\right\}^2+y^2=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2y^2+y^2$

$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$ より $\dfrac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2y^2$ $\therefore \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4=1$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\pm1$ $\therefore y=\pm x+c$

(4)



接線の方程式 $Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)$

Qの座標 $\left(x-\dfrac{y}{\frac{dy}{dx}},\ 0\right)$, Rの座標 $\left(0,\ y-x\dfrac{dy}{dx}\right)$

題意より $x=\dfrac{x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}}{2}$ かつ $y=\dfrac{y-x\frac{dy}{dx}}{2}$

$\therefore y=-x\dfrac{dy}{dx}$ $\therefore \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$

$\therefore \log y=-\log x+c=\log\dfrac{e^c}{x}$ $\therefore xy=e^c$ $\therefore xy=c$

問題1.2.2

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v=\dfrac{y}{x}$ とおくと. $y=xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$.

これらを与式に代入: $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1+v^2}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1+v^2}-v=\dfrac{2v-v-v^3}{1+v^2}$

$=\dfrac{v-v^3}{1+v^2}$ $\therefore \dfrac{1+v^2}{v(1-v^2)}dv=\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \displaystyle\int\left(\frac{1}{v}+\frac{2v}{1-v^2}\right)dv=\log x+c$.

$\therefore \log v-\log(1-v^2)=\log x+c$ $\therefore \log\dfrac{v}{1-v^2}=\log e^c\cdot x$ $\therefore \dfrac{v}{1-v^2}=e^c\cdot x$.

$\therefore \dfrac{v}{1-v^2}=cx$ $\therefore \dfrac{xy}{x^2-y^2}=c\cancel{x}$ $\therefore x^2-y^2=\dfrac{1}{c}y$ $\therefore \underline{x^2-y^2=cy}$

(2) $xy\dfrac{dy}{dx}=y^2-x^2$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{xy}=\dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\frac{y}{x}}$. $v=\dfrac{y}{x}$ とおくと. $y=xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$

これらを与式に代入: $\cancel{v}+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^2-1}{v}=\cancel{v}-\dfrac{1}{v}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{v}$ $\therefore v\,dv=-\dfrac{dx}{x}$

$\therefore \dfrac{1}{2}v^2=-\log x+c$ $\therefore v^2=-2\log x+2c$ $\therefore \dfrac{y^2}{x^2}=-2\log x+2c$ $\therefore \dfrac{y^2}{x^2}=-2\log x+c$

$\therefore \underline{y^2=x^2(-2\log x+c)}$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{1+y/x}{y/x-1}$. $v=\dfrac{y}{x}$ とおくと $y=xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$. これらを

与式に代入. $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v+1}{v-1}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v+1}{v-1}-v=\dfrac{v+1-v^2+v}{v-1}=-\dfrac{v^2-2v-1}{v-1}$

$\therefore \dfrac{v-1}{v^2-2v-1}dv=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \dfrac{1}{2}\log(v^2-2v+1)=-\log x+c$ $\therefore \log(v^2-2v-1)=\log\dfrac{e^{2c}}{x^2}$

$\therefore v^2-2v-1=\dfrac{e^{2c}}{x^2}$ $\therefore y^2-2xy-x^2=e^{2c}$ $\therefore \underline{x^2+2xy-y^2=c}$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$. $v=\dfrac{y}{x}$ とおくと. $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$. これらを与式に代入:

$\cancel{v}+x\dfrac{dv}{dx}=\cancel{v}+\tan v$ $\therefore \dfrac{\cos v}{\sin v}dv=\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \log\sin v=\log x+c=\log e^c\cdot x$

$\therefore \sin v=e^c\cdot x$ $\therefore \underline{\sin\dfrac{y}{x}=cx}$

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\dfrac{y}{x}+1$. $v=\dfrac{y}{x}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$. これらを与式に代入.

$v + x\frac{dv}{dx} = v^2+v+1 \quad \therefore \frac{dv}{v^2+1} = \frac{dx}{x} \quad \therefore \tan^{-1}v = \log x + c \quad \therefore v = \tan(\log x + c)$

$\therefore y = x\tan(\log x + c)$

(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v=\frac{y}{x}$ とおくと $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$. これらを与式に代入:

$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \sqrt{1+v^2} \quad \therefore \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \quad \therefore \log\left(v+\sqrt{v^2+1}\right) = \log x + c$

$\therefore v + \sqrt{v^2+1} = e^c\cdot x \quad \therefore \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = cx \quad \therefore y+\sqrt{x^2+y^2} = cx^2$

$\boxed{2}$ (1) 2直線 $x-y-1=0$, $x-2y-1=0$ の交点は $(x,y)=(1,0)$. よって $p=x-1$, $q=y$ とおく. このとき $\frac{dy}{dx} = \frac{dq}{dp}$ なので 与式は $\frac{dq}{dp} = \frac{p-q}{p-2q} = \frac{1-q/p}{1-2q/p}$. $v=\frac{q}{p}$ とおくと $\frac{dq}{dp} = v + p\frac{dv}{dp}$ これらを代入すると $v + p\frac{dv}{dp} = \frac{1-v}{1-2v} \quad \therefore \frac{2v-1}{2v^2-2v+1}dv = -\frac{dp}{p}$

$\therefore \frac{1}{2}\log(2v^2-2v+1) = -\log p + c \quad \therefore \log(2v^2-2v+1) = \log\frac{e^{2c}}{p^2}$

$\therefore 2v^2-2v+1 = \frac{c}{p^2} \quad \therefore p^2-2pq+2q^2 = c \quad \therefore (x-1)^2-2(x-1)y+2y^2=c$

(2) 2直線 $6x-2y-3=0$, $2x+2y-1=0$ の交点は $(x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)$. よって

$p=x-\frac{1}{2}$, $q=y$ とおく. このとき $\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}$ なので. 与式は $\frac{dq}{dp} = \frac{6p-2q}{2p+2q} = \frac{3p-q}{p+q}$

$= \frac{3-q/p}{1+q/p}$. $v=\frac{q}{p}$ とおくと $\frac{dq}{dp} = v+p\frac{dv}{dp}$. これらを代入:

$v+p\frac{dv}{dp} = \frac{3-v}{1+v} \quad \therefore \frac{v+1}{v^2+2v-3}dv = -\frac{dp}{p} \quad \therefore \frac{1}{2}\log(v^2+2v-3) = -\log p + c$

$\therefore \log(v^2+2v-3) = \log\frac{e^{2c}}{p^2} \quad \therefore v^2+2v-3 = \frac{c}{p^2} \quad \therefore q^2+2pq-3p^2=c$

$\therefore y^2+2y\left(x-\frac{1}{2}\right)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=c$

$\boxed{3}$ $x^2+y^2=cx \quad \therefore 2x+2yy'=c \quad \therefore x^2+y^2=x(2x+2yy')$

$\therefore x^2+y^2=2x^2+2xyy' \quad \therefore 2xyy'=y^2-x^2$. 従って．直交截線の方程式は

$2xy\left(-\dfrac{1}{y'}\right)=y^2-x^2 \quad \therefore \dfrac{y'}{2xy}=\dfrac{1}{x^2-y^2} \quad \therefore y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$v=\dfrac{y}{x}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$．これらを与式に代入．$v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1-v^2}$

$\therefore x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^3+v}{1-v^2} \quad \therefore \dfrac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv=-\dfrac{dx}{x} \quad \therefore \displaystyle\int\left(\frac{2v}{v^2+1}-\frac{1}{v}\right)dv=-\log x+c$

$\therefore \log(v^2+1)-\log v=-\log x+c \quad \therefore x\left(\dfrac{v^2+1}{v}\right)=e^c \quad \therefore x^2+y^2=e^c\cdot y$

$\therefore x^2+y^2=cy$. 初期条件 $x=1, y=1$ より．$1^2+1^2=c\cdot 1 \quad \therefore c=2 \quad \therefore x^2+y^2=2y$

問題1.2.3

1 (1) ① $y'+2xy=0$ を解く. $\frac{dy}{dx}=-2xy$ $\therefore \frac{dy}{y}=-2x\,dx$ $\therefore \log y=-x^2+c$
$\therefore y=e^c\cdot e^{-x^2}$ $\therefore y=ce^{-x^2}$

② $y=v\,e^{-x^2}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{dv}{dx}e^{-x^2}-2xve^{-x^2}$. これらを与式に代入:
$e^{-x^2}\frac{dv}{dx}\cancel{-2xve^{-x^2}}\cancel{+2xve^{-x^2}}=x$ $\therefore \frac{dv}{dx}=xe^{x^2}$ $\therefore v=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$
$\therefore y=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+c\right)=ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$

(2) ① $xy'+y=0$ を解く. $x\frac{dy}{dx}=-y$ $\therefore \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ $\therefore \log y=-\log x+c=\log\frac{e^c}{x}$
$\therefore y=\frac{e^c}{x}$ $\therefore y=\frac{c}{x}$

② $y=\frac{v}{x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x-v}{x^2}$ これらを与式に代入:
$x\cdot\frac{xv'-v}{x^2}+\frac{v}{x}=\sin x$ $\therefore v'\cancel{-\frac{v}{x}}\cancel{+\frac{v}{x}}=\sin x$ $\therefore v=-\cos x+c$
$\therefore y=\frac{c-\cos x}{x}$

(3) ① $xy'+4y=0$ を解く: $x\frac{dy}{dx}=-4y$ $\therefore \frac{dy}{y}=-\frac{4}{x}dx$ $\therefore \log y=-4\log x+c$
$\therefore y=\frac{e^c}{x^4}$ $\therefore y=\frac{c}{x^4}$

② $y=\frac{v}{x^4}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x^4-4x^3\cdot v}{x^8}=\frac{v'}{x^4}-\frac{4v}{x^5}$.

これらを与式に代入: $x\left(\frac{v'}{x^4}-\cancel{\frac{4v}{x^5}}\right)+\cancel{\frac{4v}{x^4}}=\frac{1}{x^4}$ $\therefore \frac{v'}{x^3}=\frac{1}{x^4}$ $\therefore v'=\frac{1}{x}$

$\therefore v=\log x+c$ $\therefore y=\frac{1}{x^4}(\log x+c)$

(4) ① $y'\cos x-y\sin x=0$ を解く: $\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x$ $\therefore \frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{\cos x}dx$
$\therefore \log y=-\log\cos x+c$ $\therefore y=\frac{e^c}{\cos x}$ $\therefore y=\frac{c}{\cos x}$

② $y=\frac{v}{\cos x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}$

これらを与式に代入: $\cos x\cdot\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}-\sin x\cdot\frac{v}{\cos x}=\sin 2x$

$\therefore v' + \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}} v - \frac{\sin x}{\cos x} v = \sin 2x \quad \therefore v = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

$\therefore y = \frac{1}{\cos x}\left(c - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

(5) ① $xy' - (x+1)y = 0$ を解く: $x\frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \log y = x + \log x + c \quad \therefore y = e^c \cdot xe^x \quad \therefore y = c \cdot xe^x$

② $y = v \cdot xe^x$ が与式を満たすようにvを定める: $y' = v' \cdot xe^x + v(e^x + xe^x)$.

これらを与式に代入: $x(xe^x v' + e^x \cdot v + xe^x v) - (x+1)xe^x v = x^2$

$\therefore x^2 e^x v' + \cancel{xe^x v} + \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{xe^x v} = x^2 \quad \therefore v' = e^{-x}$

$\therefore v = -e^{-x} + c \quad \therefore y = xe^x(-e^{-x} + c) = cxe^x - x \quad \therefore y = x(ce^x - 1)$

(6) ① $xy' - 2y = 0$ を解く: $x\frac{dy}{dx} = 2y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \quad \therefore \log y = 2\log x + c$

$\therefore y = e^c \cdot x^2 \quad \therefore y = cx^2$

② $y = v \cdot x^2$ が与式を満たすようにvを定める: $y' = v' \cdot x^2 + 2vx$ これらを与式に代入:

$x(v'x^2 + \cancel{2vx}) - \cancel{2vx^2} = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore x^3 v' = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore v' = xe^{-x^2}$

$\therefore v = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \quad \therefore y = x^2\left(c - \frac{e^{-x^2}}{2}\right) \quad \therefore y = cx^2 - \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$

(7) ① $y' + y\tan x = 0$ を解く: $\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot dx$

$\therefore \log y = \log \cos x + c \quad \therefore y = e^c \cdot \cos x \quad \therefore y = c \cdot \cos x$

② $y = v \cdot \cos x$ が与式を満たすようにvを定める: $y' = v'\cos x - v\sin x$ これらを与式に

代入: $v'\cos x - \cancel{v\sin x} + \cancel{v\cos x \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x \quad \therefore v' = 1 \quad \therefore v = x + c$

$\therefore y = (x + c)\cos x$

(8) ① $(x\log x)y'+y=0$ を解く：$(x\log x)\dfrac{dy}{dx}=-y$ ∴ $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x\log x}$

∴ $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{\frac{1}{x}}{\log x}dx$ ∴ $\log y=-\log\log x+c=\log\dfrac{e^c}{\log x}$ ∴ $y=\dfrac{e^c}{\log x}$

∴ $y=\dfrac{c}{\log x}$

② $y=\dfrac{v}{\log x}$ が⑤式を満たすようにvを定める：$y'=\dfrac{v'\log x-v\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$=\dfrac{v'}{\log x}-\dfrac{v}{x(\log x)^2}$ これらを⑤式に代入

∴ $(x\log x)\left(\dfrac{v'}{\log x}-\dfrac{v}{x(\log x)^2}\right)+\dfrac{v}{\log x}=\log x$

∴ $x\cdot v'-\cancel{\dfrac{v}{\log x}}+\cancel{\dfrac{v}{\log x}}=\log x$ ∴ $v'=\dfrac{\log x}{x}$ ∴ $v=\dfrac{1}{2}(\log x)^2+c$

∴ $y=\dfrac{1}{\log x}\left(\dfrac{1}{2}(\log x)^2+c\right)$ ∴ $y=\dfrac{c}{\log x}+\dfrac{1}{2}\log x$

$\boxed{2}$ (1) ① $z=y^{-5}$ とおくと $z'=-5y^{-6}\cdot y'$ ∴ $y'=-\dfrac{1}{5}y^6\cdot z'$ これを⑤式に代入：

$-\dfrac{x}{5}y^6\cdot z'+y=x^3y^6$ ∴ $-\dfrac{x}{5}z'+y^{-5}=x^3$ ∴ $-\dfrac{x}{5}z'+z=x^3$

∴ $z'-\dfrac{5}{x}z=-5x^2$ …(*)

② $z'-\dfrac{5}{x}z=0$ を解く：$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{5z}{x}$ ∴ $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{5}{x}dx$ ∴ $\log z=5\log x+c$

∴ $z=e^c x^5$ ∴ $z=cx^5$

③ $z=v\cdot x^5$ が(*)を満たすようにvを定める：$z'=v'x^5+5vx^4$ これらを(*)に代入：

$x^5v'+\cancel{5x^4v}-\cancel{\dfrac{5}{x}\cdot vx^5}=-5x^2$ ∴ $v'=-5x^{-3}$ ∴ $v=\dfrac{-5}{-2}x^{-2}+c$

∴ $v=\dfrac{5}{2}x^{-2}+c$

以上より $z=x^5\left(\dfrac{5}{2}x^{-2}+c\right)=cx^5+\dfrac{5}{2}x^3$ ∴ $\dfrac{1}{y^5}=cx^5+\dfrac{5}{2}x^3$

(2) ① $z = y^{1-\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}$ とおくと $z' = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\cdot y'$ ∴ $y' = -2y^{\frac{3}{2}}z'$. これを与式に代入:

$-2y^{\frac{3}{2}}z' + 2y = 2xy^{\frac{3}{2}}$ ∴ $-2z' + 2y^{-\frac{1}{2}} = 2x$ ∴ $-2z' + 2z = 2x$

∴ $z' - z = -x$ …(*)

② $z' - z = 0$ を解く $\frac{dz}{dx} = z$ ∴ $\frac{dz}{z} = dx$ ∴ $\log z = x + c$ ∴ $z = e^{c}\cdot e^{x}$ ∴ $z = Ce^{x}$

③ $z = v\cdot e^{x}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{x} + v\cdot e^{x}$ これを(*)に代入:

$v'e^{x} + \cancel{ve^{x}} - \cancel{ve^{x}} = -x$ ∴ $v' = -xe^{-x}$

∴ $v = -\int xe^{-x}dx + c = -\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) + c = xe^{-x} + e^{-x} + c$

以上より $z = e^{x}\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right) = ce^{x} + x + 1$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{y}} = ce^{x} + x + 1$

(3) ① $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ とおくと $z' = -\frac{1}{y^2}y'$ ∴ $y' = -y^2 z'$. これを与式に代入:

$-y^2 z' - xy = xe^{-x^2}\cdot y^2$ ∴ $z' + x\cdot y^{-1} = -xe^{-x^2}$ ∴ $z' + xz = -xe^{-x^2}$ …(*)

② $z' + xz = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -xz$ ∴ $\frac{dz}{z} = -x\,dx$ ∴ $\log z = -\frac{x^2}{2} + c$

∴ $z = e^{c}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∴ $z = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$

③ $z = v\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v$. これを(*)

に代入: $v'e^{-\frac{x^2}{2}} - \cancel{xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v} + \cancel{xv\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = -xe^{-x^2}$ ∴ $v' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$v = e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

以上より $z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$ ∴ $\frac{1}{y} = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$

(4) ① $z=y^{1-3}=y^{-2}$ とおくと $z'=-2y^{-3}\cdot y'$ ∴ $y'=-\frac{y^3}{2}z'$ これを与式に代入:

$x\left(-\frac{y^3}{2}z'\right)+y=y^3\log x$ ∴ $-\frac{x}{2}z'+y^{-2}=\log x$ ∴ $-\frac{x}{2}z'+z=\log x$

∴ $z'-\frac{2}{x}z=-\frac{2\log x}{x}$ …(*)

② $z'-\frac{2}{x}z=0$ を解く: $\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z$ ∴ $\frac{dz}{z}=\frac{2}{x}dx$ ∴ $\log z=2\log x+c=\log e^c\cdot x^2$

∴ $z=e^c\cdot x^2$ ∴ $z=Cx^2$

③ $z=vx^2$ が(*)を満たすように v を定める: $z'=v'x^2+2xv$ これを(*)に代入:

$x^2v'+\cancel{2xv}-\frac{2}{x}\cdot\cancel{vx^2}=-\frac{2\log x}{x}$ ∴ $v'=-\frac{2\log x}{x^3}$

∴ $v=-\int\frac{2\log x}{x^3}dx=-2\int(\log x)\cdot x^{-3}dx+c$

$=-2\left\{(\log x)\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)-\int\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx\right\}+c$

$=\frac{\log x}{x^2}-\int x^{-3}dx+c=\frac{\log x}{x^2}+\frac{1}{2}x^{-2}+c$

以上より $z=x^2\left(\frac{\log x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+c\right)=Cx^2+\log x+\frac{1}{2}$ ∴ $\frac{1}{y^2}=Cx^2+\log x+\frac{1}{2}$

[3] (1) $z=\sin y$ とおくと $\frac{dz}{dx}=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$ これを与式に代入:

$\frac{dz}{dx}+xz=2x$ …(*) ← 線形

① $\frac{dz}{dx}+xz=0$ を解く: $\frac{dz}{dx}=-xz$ ∴ $\frac{dz}{z}=-x\,dx$ ∴ $\log z=-\frac{x^2}{2}+c$

∴ $z=e^c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∴ $z=C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

② $z=ve^{-\frac{x^2}{2}}$ が(*)を満たすように v を定める: $\frac{dz}{dx}=v'e^{-\frac{x^2}{2}}+v\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

これらを(*)に代入: $e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot v' - \cancel{x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot v} + \cancel{x v e^{-\frac{x^2}{2}}} = 2x$ ∴ $v' = 2x e^{\frac{x^2}{2}}$

∴ $v = 2e^{\frac{x^2}{2}} + c$

以上より、$z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c + 2e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ ∴ $z = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$ ∴ $\sin y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$

(2) $z = y^2$とおくと $z' = 2y \cdot y'$ これらを与式に代入:

$z' - \frac{1}{x^2} z = e^{\frac{x^2-1}{x}}$ …(*) ← 線形

① $z' - \frac{1}{x^2} z = 0$を解く: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x^2}$ ∴ $\frac{dz}{z} = x^{-2}dx$ ∴ $\log z = -\frac{1}{x} + c$

∴ $z = e^c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ ∴ $z = ce^{-\frac{1}{x}}$

② $z = v \cdot e^{-\frac{1}{x}}$が(*)を満たすようにvを定める: $z' = v'e^{-\frac{1}{x}} + v\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right)$

これらを(*)に代入: $v'e^{-\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} v} - \cancel{\frac{1}{x^2} v e^{-\frac{1}{x}}} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

∴ $v' = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{x - \frac{1}{x}} = e^x$ ∴ $v = e^x + c$

以上より、$z = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$ ∴ $y^2 = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$

(3) $y^2 = xz$とおくと $2yy' = z + x \cdot z'$ これらを与式に代入:

$x(z + x \cdot z') + (x-1)xz = x^2 e^x$ ∴ $\cancel{xz} + x^2 z' + x^2 z - \cancel{xz} = x^2 e^x$

∴ $x^2 z' + x^2 z = x^2 e^x$ ∴ $z' + z = e^x$ …(*) ← 線形

① $z' + z = 0$を解く: $\frac{dz}{dx} = -z$ ∴ $\frac{dz}{z} = -dx$ ∴ $\log z = -x + c$ ∴ $z = e^c \cdot e^{-x}$

∴ $z = ce^{-x}$

② $z = v \cdot e^{-x}$が(*)を満たすようにvを定める: $z' = v'e^{-x} - ve^{-x}$、これらを(*)に代入:

$v'e^{-x} - \cancel{ve^{-x}} + \cancel{ve^{-x}} = e^x$ ∴ $v' = e^{2x}$ ∴ $v = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

以上より $z = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right) = ce^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$　∴ $y^2 = xz = cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

∴ $y^2 = cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

$\boxed{4}$ 与式の任意の解を y_1 とし、$z = y - y_1$ とおく。与式に代入すると

$\frac{dz}{dx}+\frac{dy_1}{dx}+P(x)(z+y_1) = Q(x)$　∴ $\frac{dz}{dx}+P(x)z+\left\{\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1-Q(x)\right\}=0$

∴ $\frac{dz}{dx}+P(x)z=0$。この変数分離形の方程式を解くと $z = ce^{-\int P(x)dx}$

∴ $y = ce^{-\int P(x)dx}+y_1$

また、上の公式より $y = ce^{-\int \frac{dx}{x}}+x^2 = ce^{-\log x}+x^2 = \frac{c}{x}+x^2$　∴ $y = \frac{c}{x}+x^2$

$\boxed{5}$ 初期条件を満たす解は、解の公式より、$y(x) = e^{-x}\int_0^x e^t r(t)dt$ となる。仮定より

すべての $t \geq 0$ に対して $|r(t)| \leq M$ なので、すべての $x \geq 0$ に対して

$$|y(x)| \leq e^{-x}\int_0^x e^t|r(t)|dt \leq e^{-x}\int_0^x Me^t dt = Me^{-x}\left[e^t\right]_0^x$$

$$= Me^{-x}(e^x-1) \leq Me^{-x}\cdot e^x = M.$$

問題1.2.4

[1] (1) ① 完全性の確認：$P=\cos x+2xy$, $Q=x^2$ とおく. $P_y=2x$, $Q_x=2x$

∴ $P_y=Q_x$ ∴ 完全

① $U_x=\cos x+2xy$ となる U を求める：$U=\int(\cos x+2xy)dx+w(y)=\sin x+x^2y+w(y)$

② $U_y=x^2$ となるように $w(y)$ を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=x^2$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $U=\sin x+x^2y$ ∴ $\sin x+x^2y=c$

(2) ① 完全性の確認：$P=2x+e^y$, $Q=xe^y$ とおく $P_y=e^y$, $Q_x=e^y$ ∴ $P_y=Q_x$

∴ 完全

① $U_x=2x+e^y$ となる U を求める：$U=\int(2x+e^y)dx+w(y)$ ∴ $U=x^2+xe^y+w(y)$

② $U_y=xe^y$ となるように $w(y)$ を定める：$xe^y+\frac{dw}{dy}=xe^y$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $U=x^2+xe^y$ ∴ $x^2+xe^y=c$

(3) ① 完全性の確認：$P=2xy$, $Q=1+x^2$ とおく $P_y=2x$, $Q_x=2x$ ∴ $P_y=Q_x$

∴ 完全

① $U_x=2xy$ となる U を求める：$U=\int 2xy\,dx+w(y)=x^2y+w(y)$

② $U_y=1+x^2$ となるように $w(y)$ を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=1+x^2$ ∴ $\frac{dw}{dy}=1$ ∴ $w(y)=y$

以上より $U=x^2y+y$ ∴ $x^2y+y=c$

(4) ① 完全性の確認：$P=x^3+2xy+y$, $Q=y^3+x^2+x$ とおく $P_y=2x+1$,

$Q_x=2x+1$ ∴ $P_y=Q_x$ ∴ 完全

① $U_x=x^3+2xy+y$ となる U を求める：$U=\int(x^3+2xy+y)dx+w(y)$

$\therefore u = \frac{x^4}{4} + x^2 y + yx + w(y)$

② $u_y = y^3 + x^2 + x$ となるように $w(y)$ を定める：$x^2 + x + \frac{dw}{dy} = y^3 + x^2 + x$ $\therefore \frac{dw}{dy} = y^3$

$\therefore w(y) = \frac{y^4}{4}$

以上より $u = \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4}$ $\therefore \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4} = c$

(5) ⓪完全性の確認：$P = x^3 + 5xy^2$, $Q = 5x^2 y + 2y^3$ とおく．$P_y = 10xy$,

$Q_x = 10xy$ $\therefore P_y = Q_x$ $\therefore$ 完全

① $u_x = x^3 + 5xy^2$ となる u を求める：$u = \int (x^3 + 5xy^2) dx + w(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2} x^2 y^2 + w(y)$

② $u_y = 5x^2 y + 2y^3$ となるように $w(y)$ を定める：$5x^2 y + \frac{dw}{dy} = 5x^2 y + 2y^3$

$\therefore \frac{dw}{dy} = 2y^3$ $\therefore w(y) = \frac{y^4}{2}$

以上より $u = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2} x^2 y^2 + \frac{y^4}{2}$ $\therefore \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2} x^2 y^2 + \frac{y^4}{2} = c$

(6) ⓪完全性の確認：$P = y^2 + e^x \sin y$, $Q = 2xy + e^x \cos y$ とおく $P_y = 2y + e^x \cos y$

$Q_x = 2y + e^x \cos y$ $\therefore P_y = Q_x$ $\therefore$ 完全

① $u_x = y^2 + e^x \sin y$ となる u を求める：$u = \int (y^2 + e^x \sin y) dx + w(y) = xy^2 + e^x \sin y + w(y)$

② $u_y = 2xy + e^x \cos y$ となるように $w(y)$ を定める：$2xy + e^x \cos y + \frac{dw}{dy} = 2xy + e^x \cos y$

$\therefore \frac{dw}{dy} = 0$ $\therefore w(y) = 0$

以上より $u = xy^2 + e^x \sin y$ $\therefore xy^2 + e^x \sin y = c$

[2] (1) $\frac{1}{\sin y}$ を両辺にかけると $dx+\frac{\cos y}{\sin y}dy=0$

① 完全性の確認: $P=1$, $Q=\frac{\cos y}{\sin y}$ とおくと $P_y=0$, $Q_x=0$ ∴ $P_y=Q_x$ ∴ 完全

① $u_x=1$ となる u を求める: $u=x+w(y)$

② $u_y=\frac{\cos y}{\sin y}$ となるように $w(y)$ を求める: $\frac{dw}{dy}=\frac{\cos y}{\sin y}$ ∴ $w(y)=\log \sin y$

以上より $u=x+\log\sin y=\log(e^x\sin y)$ ∴ $\log(e^x\sin y)=c$ ∴ $e^x\sin y=e^c$

∴ $e^x\sin y=c$

(2) $\frac{1}{x^2}$ を両辺にかけると $\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+x\,dy=0$

① 完全性の確認: $P=\frac{2}{x}+y$, $Q=x$ とおく. $P_y=1$, $Q_x=1$ ∴ $P_y=Q_x$ ∴ 完全

① $u_x=\frac{2}{x}+y$ となる u を求める: $u=\int\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+w(y)$ ∴ $u=2\log x+xy+w(y)$

② $u_y=x$ となるように $w(y)$ を求める: $x+\frac{dw}{dy}=x$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=2\log x+xy$ ∴ $xy+2\log x=c$

(3) e^y を両辺にかけると $(ye^y+e^y\cos x)dx+(xe^y+xye^y+e^y\sin x)dy=0$

① 完全性の確認: $P=ye^y+e^y\cos x$, $Q=xe^y+xye^y+e^y\sin x$ とおく.

$P_y=e^y+ye^y+e^y\cos x$, $Q_x=e^y+ye^y+e^y\cos x$ ∴ $P_y=Q_x$ ∴ 完全

① $u_x=ye^y+e^y\cos x$ となる u を求める: $u=\int(ye^y+e^y\cos x)dx+w(y)$

∴ $u=xye^y+e^y\sin x+w(y)$

② $u_y = xe^y + xye^y + e^y\sin x$ となるように $w(y)$ を定める：

$x(e^y + ye^y) + e^y\sin x + \frac{dw}{dy} = xe^y + xye^y + e^y\sin x \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 0 \quad \therefore w(y) = 0$

以上より $u = e^y(xy + \sin x) \quad \therefore e^y(xy + \sin x) = c$

(4) $\frac{1}{x^2+y^2}$ を両辺にかけると $\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

① 完全性の確認：$P = \frac{y}{x^2+y^2}$，$Q = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ とおく $P_y = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$
$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$Q_x = -\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore P_y = Q_x \quad \therefore$ 完全

① $u_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ となる u を求める：$u = \int \frac{y}{x^2+y^2}dx + w(y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} + w(y)$

② $u_y = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ となるように $w(y)$ を定める：$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{dw}{dy} = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$

$\therefore \cancel{\frac{-x}{x^2+y^2}} + \frac{dw}{dy} = 1 - \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 1 \quad \therefore w(y) = y$

以上より $u = \tan^{-1}\frac{x}{y} + y \quad \therefore \tan^{-1}\frac{x}{y} + y = c$

(5) $e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ を両辺にかけると $xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dx + (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dy = 0$

① 完全性の確認：$P = xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$，$Q = (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ とおく

$P_y = 3xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + xy^3\left(-yx^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

$Q_x = 2xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + (x^2y^2-1)\left(-xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (2xy^2 - x^3y^4 + xy^2)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$
$= (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

$\therefore P_y = Q_x \quad \therefore$ 完全

① $u_x = xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となるuを求める：

$$u = \int xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}} dx + w(y) = y\left(-e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) + w(y) = -ye^{-\frac{x^2y^2}{2}} + w(y)$$

② $u_y = (x^2y^2 - 1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となる$w(y)$を求める：

$$-e^{-\frac{x^2y^2}{2}} - y\left(-yx^2 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) + \frac{dw}{dy} = (x^2y^2 - 1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}} \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 0 \quad \therefore w(y) = 0$$

以上より $u = -ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ $\therefore ye^{-\frac{x^2y^2}{2}} = c$

$\boxed{3}$ $\mu = x^m y^n$ とおいて与式の両辺にかける

(1) ① 積分因子：$P = 2x^{m+1}y^{n+1}$, $Q = x^m y^{n+2} - x^{m+2}y^n$ $\therefore P_y = 2(n+1)x^m y^n$,

$Q_x = mx^{m-1}y^{n+2} - (m+2)x^m y^n$ $\begin{cases} m = 0 \\ -(m+2) = 2(n+1) \end{cases}$ $\therefore m = 0,\ n = -2$ $\therefore \mu = \frac{1}{y^2}$

$P_y = Q_x$ とすると

よって $\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$ を解く

② $u_x = \frac{2x}{y}$ となるuを求める．$u = \int \frac{2x}{y}dx + w(y) = \frac{x^2}{y} + w(y)$

③ $u_y = 1 - \frac{x^2}{y^2}$ となる$w(y)$を求める．$-\cancel{\frac{x^2}{y^2}} + \frac{dw}{dy} = 1 - \cancel{\frac{x^2}{y^2}}$ $\therefore \frac{dw}{dy} = 1$ $\therefore w(y) = y$

以上より $u = \frac{x^2}{y} + y$ $\therefore \frac{x^2}{y} + y = c$

(2) ① 積分因子：$P = x^{m+1}y^{n+1} + x^m y^{n+2}$, $Q = x^{m+1}y^{n+1} - x^{m+2}y^n$ とおく

$P_y = (n+1)x^{m+1}y^n + (n+2)x^m y^{n+1}$, $Q_x = (m+1)x^m y^{n+1} - (m+2)x^{m+1}y^n$

$P_y = Q_x$ とすると $\begin{cases} -(m+2) = n+1 \\ m+1 = n+2 \end{cases}$ $\therefore m = -1,\ n = -2$ $\therefore \mu = \frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$ を解く

② $U_x = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ となるUを求める：$U = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)dx + w(y) = \frac{x}{y} + \log x + w(y)$

③ $U_y = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める：$-\cancel{\frac{x}{y^2}} + \frac{dw}{dy} = \frac{1}{y} - \cancel{\frac{x}{y^2}}$ ∴ $\frac{dw}{dy} = \frac{1}{y}$ ∴ $w(y) = \log y$

以上より $U = \frac{x}{y} + \log x + \log y$ ∴ $\frac{x}{y} + \log x + \log y = c$

(3) $P = x^m y^{n+2} - x^{m+1} y^{n+1}$, $Q = x^{m+2} y^n$ とおく. $P_y = (n+2)x^m y^{n+1} - (n+1)x^{m+1} y^n$,

$Q_x = (m+2)x^{m+1} y^n$ $P_y = Q_x$ となるとき $\begin{cases} n+2=0 \\ m+2=-(n+1) \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$ ∴ $\mu = \frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$ を解く

① $U_x = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ となるUを求める：$U = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + w(y) = \log x - \frac{x}{y} + w(y)$

② $U_y = \frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める：$\frac{x}{y^2} + \frac{dw}{dy} = \frac{x}{y^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy} = 0$ ∴ $w(y) = 0$

以上より $U = \log x - \frac{x}{y}$ ∴ $\log x - \frac{x}{y} = c$

(4) $P = x^{m+2} y^{n+1} + 2x^m y^{n+3}$, $Q = x^{m+3} y^n + x^{m+1} y^{n+2}$ とおく

$P_y = (n+1)x^{m+2} y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$, $Q_x = (m+3)x^{m+2} y^n + (m+1)x^m y^{n+2}$

$P_y = Q_x$ となるとき $\begin{cases} n+1=m+3 \\ 2(n+3)=m+1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m-n=-2 \\ m-2n=5 \end{cases}$ ∴ $m=-9,\ n=-7$ ∴ $\mu = \frac{1}{x^9 y^7}$

よって $\left(\frac{1}{x^7 y^6} + \frac{2}{x^9 y^4}\right)dx + \left(\frac{1}{x^6 y^7} + \frac{1}{x^8 y^5}\right)dy = 0$ を解く

① $U_x = x^{-7} y^{-6} + 2x^{-9} y^{-4}$ となるUを求める：

$U = \int (x^{-7} y^{-6} + 2x^{-9} y^{-4})dx + w(y) = -\frac{1}{6} x^{-6} y^{-6} - \frac{1}{4} x^{-8} y^{-4} + w(y)$

② $U_y = x^{-6} y^{-7} + x^{-8} y^{-5}$ となるようにw(y)を求める：

$x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}+\frac{dw}{dy}=x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{1}{6x^6y^6}-\frac{1}{4x^8y^4}$ ∴ $\frac{2}{x^6y^6}+\frac{3}{x^8y^4}=c$

∴ $2x^2+3y^2=cx^8y^6$

(5) $P=x^m y^{n+4}+2x^{m+4}y^{n+1}$, $Q=x^{m+5}y^n-2x^{m+1}y^{n+3}$ とおく

$P_y=(n+4)x^m y^{n+3}+2(n+1)x^{m+4}y^n$, $Q_x=(m+5)x^{m+4}y^n-2(m+1)x^m y^{n+3}$

∴ $\begin{cases} n+4=-2(m+1) \\ 2(n+1)=m+5 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} 2m+n=-6 \\ m-2n=-3 \end{cases}$ ∴ $m=-3,\ n=0$ ∴ $\mu=\frac{1}{x^3}$

よって $\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+\left(x^2-\frac{2y^3}{x^2}\right)dy=0$ を解く

① $u_x=\frac{y^4}{x^3}+2xy$ となる u を求める:

$u=\int\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+w(y)=-\frac{1}{2}x^{-2}y^4+x^2y+w(y)$

② $u_y=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ となるように $w(y)$ を求める.

$-2x^{-2}y^3+x^2+\frac{dw}{dy}=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{y^4}{2x^2}+x^2y$ ∴ $x^2y-\frac{y^4}{2x^2}=c$ ∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=2c$

∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=c$

$\boxed{4}$ (1) $\frac{\partial}{\partial y}\left\{P\cdot e^{-\int q(x)dx}\right\}=P_y\cdot e^{-\int q(x)dx}$

一方, $\frac{\partial}{\partial x}\left\{Q\cdot e^{-\int q(x)dx}\right\}=Q_x e^{-\int q(x)dx}+Q\left(-q(x)e^{-\int q(x)dx}\right)$

$$= e^{-\int g(x)dx}\{Q_x - g(x)Q\} \underset{g=\frac{Q_x-P_y}{Q}}{=} e^{-\int g(x)dx}\{Q_x - Q_x + P_y\} = P_y \cdot e^{-\int g(x)dx}$$

ゆえに、~~積分因子を有する~~。

(2) $$\frac{\partial}{\partial y}\left\{P\cdot e^{\int \psi(y)dy}\right\} = P_y \cdot e^{\int \psi(y)dy} + P\left(\psi(y)e^{\int \psi(y)dy}\right)$$

$$= e^{\int \psi(y)dy}\left(P_y + \psi(y)P\right) \underset{\psi=\frac{Q_x-P_y}{P}}{=} e^{\int \psi(y)dy}\left(\cancel{P_y} + Q_x - \cancel{P_y}\right) = Q_x e^{\int \psi(y)dy}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q e^{\int \psi(y)dy}\right\}$$ よって ~~積分因子~~

(3) まず $\frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\cdot 2y$

$$= -y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

同様に、$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\cdot 2x$

$$= -x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = P_y e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + P\left(-y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(P_y - yP\cdot\theta(u)\right) \quad \cdots\cdots (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = Q_x e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + Q\left(-x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(Q_x - xQ\cdot\theta(u)\right) \quad \cdots (**)$$

ここで $\theta(u) = \frac{Q_x - P_y}{xQ - yP}$ なので $xQ\cdot\theta(u) - yP\cdot\theta(u) = Q_x - P_y$

$\therefore P_y - yP\cdot\theta(u) = Q_x - xQ\cdot\theta(u)$ よって $(*)$, $(**)$ より

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\, e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$ ∴積分因子

(4) $\frac{\partial}{\partial y} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

$\frac{\partial}{\partial x} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

よって

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = P_y e^{\int \xi(v)dv} + xQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$

$= e^{\int \xi(v)dv}\left(P_y + xQ\cdot \xi(v)\right) \quad \cdots (*)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = Q_x e^{\int \xi(v)dv} + yQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$

$= e^{\int \xi(v)dv}\left(Q_x + yQ\,\xi(v)\right) \quad \cdots (**)$

ここで $\frac{Q_x - P_y}{xQ - yP} = \xi(v)$ なので $xQ\,\xi(v) - yP\cdot\xi(v) = Q_x - P_y$

∴ $P_y + xQ\cdot\xi(v) = Q_x + yP\cdot\xi(v)$ ゆえに $(*)$, $(**)$ より

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right)$ ゆえに積分因子

演習について:

(1) $P = \sin y$, $Q = \cos y$ とおく $P_y = \cos y$, $Q_x = 0$. よって $(Q_x - P_y)/P = -\frac{\cos y}{\sin y} = \psi$

$\int \psi\, dy = -\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\log \sin y$ ∴ $\mu = e^{-\log \sin y} = \frac{1}{\sin y}$

(2) $P = 2x + x^2 y$, $Q = x^3$ とおく $P_y = x^2$, $Q_x = 3x^2$. よって $(Q_x - P_y)/Q = (3x^2 - x^2)/x^3$

$= \frac{2}{x} = \varphi$.

$\int \varphi dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\log x = \log x^2 \quad \therefore \mu = e^{-\log x^2} = \frac{1}{x^2}$

(3) $P = y + \cos x$, $Q = x + xy + \sin x$ とおく $P_y = 1$, $Q_x = 1 + y + \cos x$

$\therefore (Q_x - P_y)/P = (1 + y + \cos x - 1)/(y + \cos x) = 1 = \psi \quad \therefore \int \psi dy = \int dy = y$

$\therefore \mu = e^y$

(4) $P = y$, $Q = x^2 + y^2 - x$ とおく. $P_y = 1$, $Q_x = 2x - 1 \quad \therefore (Q_x - P_y)/(xQ - yP)$

$= \frac{2x-1-1}{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(x-1)}{x(x^2+y^2) - (x^2+y^2)} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+y^2)} = \frac{2}{x^2+y^2}$

$\theta(u) = \frac{2}{u}$ $(u = x^2 + y^2)$ とおくと $\int \theta du = 2\log u$

$\therefore \mu = e^{-\frac{1}{2}(2\log u)} = e^{-\log u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2+y^2}$

(5) $P = xy^3$, $Q = x^2y^2 - 1$ とおく $P_y = 3xy^2$, $Q_x = 2xy^2$

$\therefore Q_x - P_y = 2xy^2 - 3xy^2 = -xy^2$, $xP - yQ = x^2y^3 - x^2y^3 + y = y$

$\therefore \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \frac{-xy^2}{y} = -xy$ ここで $\xi(v) = -v$ $(v = xy)$ とおくと

$\int \xi(v) dv = \int -v dv = -\frac{v^2}{2} \quad \therefore \mu = e^{-\frac{v^2}{2}} = e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

問題1.2.5

1 (1) $y = x + px$. 両辺をxで微分すると. $\cancel{p} = 1 + x\frac{dp}{dx} + \cancel{p}$ ∴ $x\frac{dp}{dx} = -1$

∴ $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{x}$ ∴ $p = -\log x + c$. これを与式に代入して. $x(-\log x + c) = y - x$

∴ $y = x(1 + c - \log x)$

(2) $xy = x + p$ ∴ $y = 1 + \frac{p}{x}$. 両辺をxで微分: $p = \dfrac{\frac{dp}{dx}\cdot x - p}{x^2}$

∴ $x^2 p = x\frac{dp}{dx} - p$ ∴ $x\frac{dp}{dx} = (x^2+1)p$ ∴ $\frac{dp}{p} = \left(x + \frac{1}{x}\right)dx$

∴ $\log p = \frac{x^2}{2} + \log x + c$ ∴ $p = e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c}$. これを与式に代入:

$e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c} = xy - x$ ∴ $\frac{x^2}{2} + \cancel{\log x} + c = \cancel{\log x} + \log(y-1)$ ∴ $y - 1 = e^{\frac{x^2}{2} + c}$.

∴ $y = e^{c}\, e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ ∴ $y = c\,e^{\frac{x^2}{2}} + 1$

(3) $y = \frac{1}{3}(p^3 + 3p^2)$. 両辺を$x$で微分. $p = \frac{1}{3}\left(3p^2\frac{dp}{dx} + 6p\frac{dp}{dx}\right)$

∴ $p = (p^2 + 2p)\frac{dp}{dx}$ ∴ $(p+2)\frac{dp}{dx} = 1$ ∴ $\frac{1}{2}(p+2)^2 = x + c$ ∴ $x = \frac{1}{2}(p+2)^2 - c$.

pを媒介変数tで置き換えると $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(t+2)^2 - c \\ y = \frac{1}{3}(t^3 + 3t^2) \end{cases}$

(4) $3xp = y - y^2p^2$ ∴ $x = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{p} - py^2\right)$. 両辺を$y$で微分:

$\frac{1}{p} = \frac{1}{3}\left(\dfrac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} - y^2\frac{dp}{dy} - p(2y)\right)$ ∴ $\frac{y(1+yp^2)}{p}\frac{dp}{dy} = -2(1+yp^2)$

∴ $\frac{dp}{p} = -\frac{2}{y}dy$ ∴ $\log p = -2\log y + c$ ∴ $p = \frac{e^c}{y^2}$ ∴ $p = \frac{c}{y^2}$.

これを与式に代入して. pを消去すると. $x = \frac{1}{3}\left(\frac{y^3}{c} - c\right)$ ∴ $y^3 = c(3x + c)$

(5) $y = xp + x\sqrt{1+p^2}$. 両辺をxで微分: $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \sqrt{1+p^2} + x\cdot\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx}$

$$\therefore \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}dp = -\frac{1}{x}dx \quad \therefore \int\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{1+p^2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right\}dp = -\log x + c$$

$$\therefore \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\log x + c = \log\frac{e^c}{x}$$

$$\therefore x = \frac{e^c}{\sqrt{1+p^2}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)} \quad \therefore x = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)} \quad (e^c \to c)$$

これを与式に代入:

$$y = \cancel{\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+p^2}\cancel{\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

pを媒介変数tで置き換えると

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)} \\ y = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

さらに、上式からtを消去すると $x^2+y^2 = 2cx$

(6) $e^{2y} = \dfrac{1-p}{p^2}e^{4x}$. 両辺の対数をとると $2y = \log(1-p) - 2\log p + 4x$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\log(1-p) - \log p + 2x \cdots ①$$

上式の両辺をxで微分: $p = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{1-p}\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx} + 2$

$$\therefore \frac{-\cancel{(p-2)}}{p(p-1)}\frac{dp}{dx} = 2\cancel{(p-2)} \quad \therefore \frac{dp}{p(p-1)} = -2dx$$

$$\therefore \int\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right\}dp = -2x + c \quad \therefore \log(p-1) - \log p = -2x + c$$

$$\therefore \log\frac{p}{p-1} = 2x - c \quad \therefore \frac{p}{p-1} = c_1e^{2x} \ (e^c \to c_1) \quad \therefore p = c_1e^{2x}(p-1)$$

$$\therefore p = \frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}.$$ これを①に代入する.

$$2y=\log\left(1-\frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}\right)-2\log\frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}+4x$$

$$=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{(c_1e^{2x})^2}+4x=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2e^{4x}}+\log e^{4x}=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}$$

$\therefore\ e^{2y}=\dfrac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}\quad \therefore\ e^{2y}=\dfrac{1}{c_1^2}-\dfrac{1}{c_1}e^{2x}$

$\boxed{2}$ (1) $p^2+5yp+6y^2=(p+2y)(p+3y)$. $p+2y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-2y$ $\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-2dx$

$\therefore\ \log y=-2x+c_1$ $\therefore\ y=e^{c_1}e^{-2x}$ $\therefore\ y=c_1e^{-2x}$. 一方. $p+3y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-3y$

$\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-3dx$ $\therefore\ \log y=-3x+c_2$ $\therefore\ y=e^{c_2}\cdot e^{-3x}$ $\therefore\ y=c_2e^{-3x}$. 以上より.

$(y-ce^{-2x})(y-ce^{-3x})=0$

(2) $x^2p^2+3xyp+2y^2=(xp+2y)(xp+y)$ $xp+2y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2y}{x}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{2}{x}dx$ $\therefore\ \log y=-2\log x+c_1$ $\therefore\ y=\dfrac{e^{c_1}}{x^2}$ $\therefore\ y=\dfrac{c_1}{x^2}$

一方. $xp+y=0$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ $\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore\ \log y=-\log x+c_2$ $\therefore\ y=\dfrac{e^{c_2}}{x}$

$\therefore\ y=\dfrac{c_2}{x}$. 以上より. $\left(y-\dfrac{c}{x^2}\right)\left(y-\dfrac{c}{x}\right)=0$

(3) $x^2p^2+xy(1+y)p+y^3=(xp+y)(xp+y^2)$. $xp+y=0$ より. $y=\dfrac{c_1}{x}$ ((2)の解を見よ). $xp+y^2=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x}$ $\therefore\ -\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dx}{x}$ $\therefore\ \dfrac{1}{y}=\log x+c_2$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{\log x+c_2}$. 以上より. $\left(y-\dfrac{c}{x}\right)\left(y-\dfrac{1}{\log x+c}\right)=0$

(4) $p(p+y)=x(x+y)$ $\therefore\ p^2+py-x^2-xy=0$ $\therefore\ (p-x)(p+x)+y(p-x)=0$

$\therefore (p-x)(p+x+y)=0$　$p-x=0$ より. $\frac{dy}{dx}=x$ $\therefore y=\frac{x^2}{2}+c_1$.

一方. $p+x+y=0$ より. $y'+y=-x$ ← 1階線形 (*)

① $y'+y=0$ を解く: $\frac{dy}{dx}=-y$ $\therefore \frac{dy}{y}=-dx$ $\therefore \log y=-x+c$ $\therefore y=e^{c}\cdot e^{-x}$

$\therefore y=c_2e^{-x}$

② $y=v\cdot e^{-x}$ が (*) を満たすように v を定める: $y'=v'e^{-x}+v(-e^{-x})$. これらを (*) に代入:

$v'e^{-x}-\cancel{ve^{-x}}+\cancel{ve^{-x}}=-x$ $\therefore v'=-xe^{x}$ $\therefore v=-\int xe^{x}dx+c_2$

$\therefore v=-\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)+c_2=-xe^{x}+e^{x}+c_2$

$\therefore y=e^{-x}\left(-xe^{x}+e^{x}+c_2\right)=-x+1+c_2e^{-x}$

以上より. $\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\left(y-1+x-ce^{-x}\right)=0$

$\boxed{3}$ (a) 与式の両辺を x で微分すると $p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}$. ゆえに、

$(x+f'(p))\frac{dp}{dx}=0$ $\therefore x+f'(p)=0$ または $\frac{dp}{dx}=0$. 特に. $p=c$ (c は任意定数).

これを与式に代入して得られる式 $y=cx+f(c)$ は任意定数を1つ含む与式の解になっているので、一般解である

(b) $p=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-f'(t)-tf''(t)+f'(t)}{-f''(t)}=t$. よって. $x=-f'(p)$,

$y=-pf'(p)+f(p)$. ゆえに $y=xp+f(p)$ となるので、与式の解である. また $t=p=\frac{dy}{dx}$

とおくと、この解の媒介変数表示は $\begin{cases} x=-f'(t) \\ y=-tf'(t)+f(t) \end{cases}$ となる. t は定数ではないので.

この解は直線ではない. よって (a)の一般解には含まれない ゆえに 特異解である.

(1) 一般解は $y=Cx-\log C$. 特異解: $f(t)=-\log t$ とおくと $f'(t)=-\frac{1}{t}$. よって

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t} \\ y=1-\log t=1+\log\frac{1}{t} \end{cases} \quad \therefore y=1+\log x$$

(2) 一般解は $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$. 特異解: $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ とおくと $f'(t)=2t\left(\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. よって
$$\begin{cases} x=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+\sqrt{1+t^2}=\frac{-t^2+1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

ここで

$$1-x^2=1-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1+t^2-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2} \quad \therefore \sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$\therefore y=\sqrt{1-x^2}$

(3) 一般解は $y=Cx+C^2$. 特異解: $f(t)=t^2$ とおくと $f'(t)=2t$. よって

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t^2+t^2 \end{cases} \quad \therefore y=-t^2=-\frac{1}{4}(-2t)^2=-\frac{1}{4}x^2 \quad \therefore y=-\frac{x^2}{4}$$

(4) 一般解は $y=Cx+\frac{1}{C}$. 特異解: $f(t)=\frac{1}{t}$ とおくと $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$. ゆえに

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t^2} \\ y=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}=\frac{2}{t} \end{cases} \quad \therefore y^2=\frac{4}{t^2}=4x \quad \therefore y^2=4x$$

問題1.2.6

$\boxed{1}$ (1) $y''' = \frac{1}{x}$ $\therefore y'' = \log x + c_1$, $y' = x\log x - x + c_1 x + c_2$

$y = \int x\log x\,dx - \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$.

ここで $\int x\log x\,dx = x(x\log x - x) - \int (x\log x - x)dx = x^2\log x - x^2 - \int x\log x\,dx + \frac{x^2}{2}$

$\therefore 2\int x\log x\,dx = x^2\log x - \frac{x^2}{2}$ $\therefore \int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$

ゆえに $y = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{3}{4}x^2 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ $\left(\frac{c_1}{2} \to c_1\right)$.

(2) $p = y'$ とおくと $y'' = \frac{dp}{dx}$ よって与式は $\frac{dp}{dx} + p = 2e^x$.

まず $\frac{dp}{dx} + p = 0$ を解く. $\frac{dp}{dx} = -p$ $\therefore \frac{dp}{p} = -dx$ $\therefore \log p = -x + c = \log e^c \cdot e^{-x}$

$\therefore p = e^c \cdot e^{-x}$ $\therefore p = c\,e^{-x}$. 次に $p = v\,e^{-x}$ が与式を満たすように v を定める.

$\frac{dp}{dx} = -e^{-x}\cdot v + e^{-x}\frac{dv}{dx}$ これを与式に代入: $-e^{-x}\cdot v + e^{-x}\frac{dv}{dx} + v e^{-x} = 2e^x$

$\therefore \frac{dv}{dx} = 2e^{2x}$ $\therefore v = 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + c_1 = e^{2x} + c_1$ $\quad p = e^{-x}(e^{2x} + c_1)$

$\therefore y' = e^x + c_1e^{-x}$ $\therefore y = e^x - c_1e^{-x} + c_2$ $\therefore y = c_1e^{-x} + c_2 + e^x$

(3) $p = y'$ とおいて. y を独立変数, p を y の関数と考える.

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}$. これを与式に代入: $yp\cdot\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$

$\therefore yp\frac{dp}{dy} = -(p^2+1)$ $\therefore \frac{p}{p^2+1}dp = -\frac{dy}{y}$ $\therefore \frac{1}{2}\int \frac{2p}{p^2+1}dp = -\log y + c$

$\therefore \frac{1}{2}\log(p^2+1) = -\log y + c$ $\therefore \log(p^2+1) = -2\log y + 2c = \log\frac{e^{2c}}{y^2}$

$\therefore p^2 + 1 = \frac{e^{2c}}{y^2}$ $\therefore p^2 = \frac{c_1}{y^2} - 1$ $\therefore p^2 = \frac{c_1 - y^2}{y^2}$ $\therefore p = \pm\frac{\sqrt{c_1 - y^2}}{y}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{c_1-y^2}}{y}$ $\therefore \frac{y}{\sqrt{c_1-y^2}}dy = \pm dx$ $\therefore \int\frac{y}{\sqrt{c_1-y^2}}dy = \pm x + c_2$

$\therefore -\sqrt{c_1-y^2} = \pm x + c_2$ $\therefore \sqrt{c_1-y^2} = \mp x + c_2$ $\therefore c_1 - y^2 = x^2 \mp 2c_2x + c_2^2$

$\therefore x^2+y^2=\mp 2c_2x+(c_1+c_2^2)$ $\therefore x^2+y^2=c_1x+c_2$

(4) $p=y'$とおいて, yを独立変数, pをyの関数と考える.

$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ これらを与式に代入 $yp\frac{dp}{dy}-p^2=2p$

$\therefore yp\frac{dp}{dy}=p^2+2p$ $\therefore y\frac{dp}{dy}=p+2$ $\therefore \frac{dp}{p+2}=\frac{dy}{y}$ $\therefore \log(p+2)=\log y+c$

$\therefore p+2=e^c\cdot y$ $\therefore \frac{dy}{dx}=c_1y-2$ $\therefore \frac{dy}{c_1y-2}=dx$ $\therefore \frac{1}{c_1}\log(c_1y-2)=x+c_2$

$\therefore \log(c_1y-2)=c_1x+c_1c_2$ $\therefore c_1y-2=e^{c_1x+c_1c_2}$ $\therefore y=\frac{e^{c_1c_2}}{c_1}e^{c_1x}+\frac{2}{c_1}$

$\therefore y=c_2e^{c_1x}+\frac{2}{c_1}$

(5) $p=y''$とおくと $p\frac{dp}{dx}=1$ $\therefore pdp=dx$ $\therefore \frac{p^2}{2}=x+c$ $\therefore p^2=2x+2c$ $\therefore p^2=2x+c_1$

$\therefore y''=\pm\sqrt{2x+c_1}$ $\therefore y'=\pm\frac{1}{3}(2x+c_1)^{\frac{3}{2}}+c_2$ $\therefore y=\pm\frac{1}{15}(2x+c_1)^{\frac{5}{2}}+c_2x+c_3$

(6) $p=y''$とおくと $y'''=\frac{dp}{dx}$. これらを与式に代入 $\frac{dp}{dx}+2p=0$ $\therefore \frac{dp}{dx}=-2p$

$\therefore \frac{dp}{p}=-2dx$ $\therefore \log p=-2x+c_1$ $\therefore p=e^{c_1}\cdot e^{-2x}$ $\therefore y''=c_1e^{-2x}$

$\therefore y'=-\frac{c_1}{2}e^{-2x}+c_2$ $\therefore y=\frac{c_1}{4}e^{-2x}+c_2x+c_3$ $\therefore y=c_1e^{-2x}+c_2x+c_3$

(7) $p=y''$とおくと $y^{(4)}=\frac{d^2p}{dx^2}$. これらを与式に代入 $4\frac{d^2p}{dx^2}=p$ $\therefore \frac{d^2p}{dx^2}=\frac{1}{4}p$

両辺に $2\frac{dp}{dx}$をかけると $2\frac{dp}{dx}\cdot\frac{d^2p}{dx^2}=\frac{1}{2}p\frac{dp}{dx}$ $\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=\frac{p}{2}\frac{dp}{dx}$

$\therefore \left(\frac{dp}{dx}\right)^2=\int\frac{p}{2}dp=\frac{p^2}{4}+c_1$ $\therefore \frac{dp}{dx}=\pm\frac{\sqrt{p^2+4c_1}}{2}$ $\therefore \frac{1}{\sqrt{p^2+4c_1}}\frac{dp}{dx}=\pm\frac{1}{2}$

$\therefore \int\frac{dp}{\sqrt{p^2+4c_1}}=\pm\frac{x}{2}+c_2$ $\therefore \log(p+\sqrt{p^2+4c_1})=\pm\frac{x}{2}+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}$

$\therefore p+\sqrt{p^2+4c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}\cdots ①$

ここで $(p+\sqrt{p^2+4c_1})(p-\sqrt{p^2+4c_1})=p^2-(p^2+4c_1)=-4c_1$ であるから ①より

$$p-\sqrt{p^2+4c_1}=-\frac{4c_1}{e^{c_2}}e^{\mp\frac{x}{2}}\cdots ②$$

①, ②より $2p=e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}-4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$ $\therefore y''=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm\frac{x}{2}}-2c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$

$\therefore y'=\pm e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3$

$\therefore y=\pm 2e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 8c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3x+c_4$ $\therefore \underline{y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{-\frac{x}{2}}+c_3x+c_4}$

(8) $p=y''$ とおくと $y^{(4)}=\frac{d^2p}{dx^2}$. よって与式は $\frac{d^2p}{dx^2}=p-1$. 両辺に $2\frac{dp}{dx}$ をかけると

$2\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}=2(p-1)\frac{dp}{dx}$ $\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2(p-1)\frac{dp}{dx}$

$\therefore \left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2\int(p-1)dp+c_1=(p-1)^2+c_1$ $\therefore \frac{dp}{dx}=\pm\sqrt{(p-1)^2+c_1}$

$\therefore \frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm 1$ $\therefore \int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm x+c_2$

ここで

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}\ \underset{dq=dp}{\overset{q=p-1}{=}}\ \int\frac{dq}{\sqrt{q^2+c_1}}=\log\left(q+\sqrt{q^2+c_1}\right)$$

$$=\log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)$$

$\therefore \log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)=\pm x+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm x}$

$\therefore p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm x}\cdots ①$

ここで

$(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1})(p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1})=(p-1)^2-(p-1)^2-c_1=-c_1$

$\therefore p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1}=-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}\cdots ②$

①,②より. $2(p-1)=e^{c_2}e^{\pm x}-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}$

$\therefore p=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm x}-\frac{c_1e^{-c_2}}{2}e^{\mp x}+1 \quad \therefore y''=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+1$

$\therefore y'=c_1e^{x}-c_2e^{-x}+x+c_3 \quad \therefore \underline{y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4}$

$\boxed{2}$ 題意より. $\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=y' \ (x\geqq 0)$. 両辺をxで微分すると $y''=\sqrt{1+(y')^2}$.

よって この方程式を初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ のもとで解けば良い.

$p=y'$ とおくと $y''=\frac{dp}{dx}$. これらを与式に代入. $\frac{dp}{dx}=\sqrt{p^2+1} \quad \therefore \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=dx$

$\therefore \int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=x+c_1 \quad \therefore \log\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)=x+c_1 \quad \therefore p+\sqrt{p^2+1}=e^{c_1}e^{x} \cdots ①$

ここで $\left(p+\sqrt{p^2+1}\right)\left(p-\sqrt{p^2+1}\right)=p^2-(p^2+1)=-1$

$\therefore p-\sqrt{p^2+1}=-\frac{1}{p+\sqrt{p^2+1}}=-e^{-c_1}e^{-x} \cdots ②$

①,②より. $2p=e^{c_1}e^{x}-e^{-c_1}e^{-x} \quad \therefore y'=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}-\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}$

$\therefore y=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}+\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}+c_2$. $y(0)=1$, $y'(0)=0$ より. $\begin{cases}\frac{e^{c_1}}{2}+\frac{e^{-c_1}}{2}+c_2=1 \cdots ③\\ \frac{e^{c_1}}{2}-\frac{e^{-c_1}}{2}=0 \cdots ④\end{cases}$

④より. $e^{c_1}=e^{-c_1} \quad \therefore c_1=-c_1 \quad \therefore c_1=0$. よって ③より. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+c_2=1 \quad \therefore c_2=0$

ゆえに $\underline{y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$

問題1.3.1

[1] (1) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(-2-4x+x^2-x^3)=0$ とおくと
$(c_1+c_2-2c_3)+(c_1+2c_2-4c_3)x+(3c_1+c_3)x^2+(-c_2-c_3)x^3=0$. 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2-2c_3=0 \\ c_1+2c_2-4c_3=0 \\ 3c_1 \qquad +c_3=0 \\ \qquad c_2+c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore c_1=c_2=c_3=0$$

ゆえに. 1次独立

(2) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(1+3x-3x^2-2x^3)=0$ とおくと
$(c_1+c_2+c_3)+(c_1+2c_2+3c_3)x+(3c_1-3c_3)x^2+(-c_2-2c_3)x^3=0$ 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+3c_3=0 \\ c_1 \qquad -c_3=0 \\ \qquad c_2+2c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} c_1-c_3=0 \\ c_2+2c_3=0 \end{cases}$$. ここで $c_3=t$ とおくと.

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$. $t=1$ とおくと $c_1=c_3=1$, $c_2=-2$. ゆえに. 1次従属.

実際, $1+3x-3x^2-2x^3=-(1+x+3x^2)+2(1+2x-x^3)$

(3) $c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x=0$ とおくと $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x=0$ ∴ $c_1+c_2x+c_3x^2=0$
$x=0$ とおくと $c_1=0$. このとき. $c_2x+c_3x^2=0$. $x=\pm1$ とおくと. $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$.
よって. $c_2=c_3=0$ ∴ $c_1=c_2=c_3=0$ ∴ 1次独立

(4) $c_1+c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$ とおく $x=0$ とおくと $c_1=0$. このとき. $c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$.
$x=\pm\pi/2$ とおくと $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$ ∴ $c_2=c_3=0$ ∴ $c_1=c_2=c_3=0$ ∴ 1次独立

$\boxed{2}$ (1) $c_1y_1+c_2y_2=c_1x^3+c_2|x|^3=0$ とおく $x=\pm1$ のとき. $c_1+c_2=0$, $-c_1+c_2=0$
∴ $c_1=c_2=0$ よって y_1, y_2 は1次独立

(2) $x\geqq 0$ のときは $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x^3 & x^3\\ 3x^2 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^5-3x^5=0$

$x<0$ のときは $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x^3 & -x^3\\ 3x^2 & -3x^2\end{vmatrix}=-3x^5-(-3x^5)=0$

以上より. すべてのxで $W(y_1,y_2)=0$

$\boxed{3}$ (1) $y=x^m$ とおくと. $y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)x^{m-2}$. これらを与式に代入:
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+x\cdot mx^{m-1}-2x^m=0$ ∴ $(m^2-2)x^m=0$ ∴ $m=\pm\sqrt{2}$. よって. $y_1=x^{\sqrt{2}}$,
$y_2=x^{-\sqrt{2}}$ が特殊解. $y_1/y_2=x^{2\sqrt{2}}$ は定数でないので. 一般解は $y=c_1x^{\sqrt{2}}+c_2x^{-\sqrt{2}}$

(2) $y=x^m$ とおくと. $y'=mx^{m-1}$, $y''=m(m-1)x^{m-2}$. これらを与式に代入:
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+4x\cdot mx^{m-1}-4x^m=0$ ∴ $(m^2+3m-4)x^m=0$ ∴ $m^2+3m-4=0$
∴ $(m+4)(m-1)=0$ ∴ $m=1,-4$. よって. $y_1=x$, $y_2=x^{-4}$ は特殊解. $y_1/y_2=x^5$ は定数
でないので. 一般解は $y=c_1x+c_2/x^4$.

$\boxed{4}$ (1) $P=\frac{1}{x}$, $y_1=x^2$. よって. $\int Pdx=\int\frac{dx}{x}=\log x$ ∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int\frac{1}{x^4}\cdot e^{-\log x}dx$

$=\int\frac{dx}{x^5}=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}=-\frac{1}{4}x^{-4}$ ∴ $y_2=x^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)=-\frac{1}{4}x^{-2}$.

∴ $y=c_1x^2-\frac{c_2}{4}x^{-2}$ ∴ $y=c_1x^2+c_2/x^2$ $\left(-\frac{c_2}{4}\to c_2\right)$

(2) $P=-\frac{x+1}{x}=-1-\frac{1}{x}$, $y_1=e^x$. よって. $\int Pdx=-x-\log x$

∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int e^{-2x}\cdot e^{x+\log x}dx=\int xe^{-x}dx=x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$ ∴ $y_2=e^x\{-(x+1)e^{-x}\}=-(x+1)$.

∴ $y=c_1e^x-c_2(x+1)$ ∴ $y=c_1(x+1)+c_2e^x$ $(c_1\to c_2,\ -c_2\to c_1)$

(3) $P = -\frac{5}{x}$, $y_1 = x^3$ より $\int P\,dx = -5\log x = -\log x^5$ $\therefore e^{-\int P\,dx} = e^{\log x^5} = x^5$

$\therefore y_2 = x^3 \cdot \int x^{-6} \cdot x^5\,dx = x^3 \int \frac{dx}{x} = x^3 \cdot \log|x|$ $\therefore y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \log|x|$

問題1.3.2

$\boxed{1}$ (1) $\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0$ $\therefore \lambda=-2,4$ $\therefore y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}$

(2) $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$ $\therefore \lambda=3$ (重解) $\therefore y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

(3) $\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)=0$ $\therefore \lambda=-1,0$ $\therefore y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-x}$ $\therefore y=C_1+C_2e^{-x}$

(4) $\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-1)^2+1=0$ $\therefore \lambda=1\pm i$ $\therefore y=e^{x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$

(5) $\lambda^2+3=0$ $\therefore \lambda=\pm\sqrt{3}i$ $\therefore y=e^{0}\cdot(C_1\sin\sqrt{3}x+C_2\cos\sqrt{3}x)$ $\therefore y=C_1\sin\sqrt{3}x+C_2\cos\sqrt{3}x$

(6) $\lambda^2-4\lambda+6=(\lambda-2)^2+2=0$ $\therefore \lambda=2\pm\sqrt{2}i$ $\therefore y=e^{2x}(C_1\sin\sqrt{2}x+C_2\cos\sqrt{2}x)$

$\boxed{2}$ (1) $u=\log x$ とおくと $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{du}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{du}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}$
$+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{1}{x}\left\{\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx}\right\}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}$. これらを与式に代入:

$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{du}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{du^2}\right)-x\cdot\frac{1}{x}\frac{dy}{du}-3y=0$ $\therefore \frac{d^2y}{du^2}-2\frac{dy}{du}-3y=0$.

$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ $\therefore \lambda=-1,3$. よって $y=C_1e^{-u}+C_2e^{3u}$

$\therefore y=C_1e^{-\log x}+C_2e^{3\log x}=C_1/x+C_2x^3$

(2) $u=\log x$ とおく. (1)と同様の計算により, $\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{dy}{du}=0$ $\therefore \lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda+2)=0$

$\therefore \lambda=0,-2$. $\therefore y=C_1+C_2e^{-2u}=C_1+C_2e^{-2\log x}=C_1+C_2/x^2$

(3) $u=\log x$ とおく. (1)と同様の計算より. $\frac{d^2y}{du^2}+4\frac{dy}{du}+4y=0$

$\therefore \lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$ $\therefore \lambda=-2$ (重解) $\therefore y=(C_1+C_2u)e^{-2u}$

$\therefore y=(C_1+C_2\log x)e^{-2\log x}=(C_1+C_2\log x)/x^2$

(4) $y = \log x$ とおく. (1)と同様の計算により. $\frac{d^2y}{du^2} + 6\frac{dy}{du} + 11y = 0$

$\therefore \lambda^2 + 6\lambda + 11 = (\lambda+3)^2 + 2 = 0 \quad \therefore \lambda = -3 \pm \sqrt{2}i \quad \therefore y = e^{-3u}(C_1 \sin\sqrt{2}u + C_2 \cos\sqrt{2}u)$

$\therefore y = e^{-3\log x}\left(C_1 \sin(\sqrt{2}\log x) + C_2 \cos(\sqrt{2}\log x)\right) = \underline{\left(C_1 \sin(\sqrt{2}\log x) + C_2 \cos(\sqrt{2}\log x)\right)/x^3}$

問題1.3.3

$\boxed{1}$ 推測特殊解 y_0 は次の通り.

(1) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (2) $y_0 = ae^x$ (3) $y_0 = (a_0x + a_1)e^{-x}$

(4) $y_0 = a\sin x + b\cos x$ (5) $y_0 = ae^x\sin x + be^x\cos x$

(6) $2e^{3x} \to ae^{3x}$, $\sin x \to b\sin x + c\cos x$ $\therefore y_0 = ae^{3x} + b\sin x + c\cos x$

(7) $6x \to a_0x + a_1$, $8e^{2x}$ は基本解 $y = e^{2x}$ の定数倍なので $8e^{2x} \to bxe^{2x}$

$\therefore y_0 = a_0x + a_1 + bxe^{2x}$

(8) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (9) $y_0 = (a_0x + a_1)e^x\sin 2x + (b_0x + b_1)e^x\cos 2x$

(10) $\cos 2x \to a\sin 2x + b\cos 2x$, $5x \to cx + d$ $\therefore y_0 = a\cos 2x + b\cos 2x + cx + d$

(11) 基本解が定数関数を含むので. $2x \to x(a_0x + a_1)$, $3\cos x \to b_1\sin x + b_2\cos x$,

e^{-x} は基本解の定数倍なので. $e^{-x} \to cxe^{-x}$ 以上より.

$y_0 = x(a_0x + a_1) + (b_1\sin x + b_2\cos x) + cxe^{-x}$

$\boxed{2}$ (i) $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$ $\therefore \lambda = -2, -4$. よって基本解は $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-4x}$.

よって. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ -2e^{-2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -4e^{-6x} + 2e^{-6x} = -2e^{-6x}$

$$\therefore \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)} = \frac{-\frac{2}{1+e^{2x}} \cdot e^{-4x}}{-2e^{-6x}} = \frac{e^{-4x}}{1+e^{2x}} \cdot e^{6x} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$\therefore \int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})$$

一方, $\dfrac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{\frac{2}{1+e^{2x}}\cdot e^{-2x}}{-2e^{-6x}} = -\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}\cdot e^{6x} = -\dfrac{e^{4x}}{1+e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x}(1+e^{2x})-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$= \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - e^{2x}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} - e^{2x}\right)dx = \frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) - \frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore y_0 = e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) + e^{-4x}\left\{\frac{1}{2}\log(1+e^{2x}) - \frac{1}{2}e^{2x}\right\}$

$= -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x})$

$\therefore y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x})$

$\therefore y_1 = C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} + \frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x}) \quad (C_1 - \frac{1}{2} \to C_1)$

(2) $\lambda^2+1=0 \therefore \lambda = \pm i$. よって基本解は $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$. ゆえに

$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$

$\therefore \dfrac{-R(x)y_2}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{-\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x}{-1} = 1 \quad \therefore \displaystyle\int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1,y_2)}dx = \int 1\,dx = x$

一方,

$\dfrac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)} = \dfrac{\frac{1}{\cos x}\sin x}{-1} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} \quad \therefore \displaystyle\int \frac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \log|\cos x|$

$\therefore y_0 = x\sin x + (\cos x)\log|\cos x| \quad \therefore y = C_1\sin x + C_2\cos x + x\sin x + (\cos x)\log|\cos x|$

PAPER 14.1

$\boxed{1}$ (1) $(3D+2)x^2 = 3Dx^2 + 2x^2 = 6x + 2x^2$

(2) $(D^3-2D^2+D-4)x^4 = -4x^4 + Dx^4 - 2D^2x^4 + D^3x^4$

$= -4x^4 + 4x^3 - 2(12x^2) + 24x = -4x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 24x$

(3) $(D-1)(D+2)e^{2x} = (D-1)(De^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(2e^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(4e^{2x})$

$= -4e^{2x} + D(4e^{2x}) = -4e^{2x} + 8e^{2x} = 4e^{2x}$

(4) $(D+4)(D-1)(e^x + \cos x) = (D+4)\{D(e^x + \cos x) - (e^x + \cos x)\}$

$= (D+4)(\cancel{e^x} - \sin x - \cancel{e^x} - \cos x) = (D+4)(-\sin x - \cos x)$

$= D(-\sin x - \cos x) + 4(-\sin x - \cos x) = -\cos x + \sin x - 4\sin x - 4\cos x$

$= -3\sin x - 5\cos x$

(5) $(D+1)(D+2)(D+3)\sin x = (D+1)(D+2)(\cos x + 3\sin x)$

$= (D+1)\{(-\sin x + 3\cos x) + 2(\cos x + 3\sin x)\} = (D+1)(5\sin x + 5\cos x)$

$= 5\cos x - \cancel{5\sin x} + \cancel{5\sin x} + 5\cos x = 10\cos x$

(6) $(D-1)^3(x^4e^{-x}) = (D-1)^2\{(D-1)x^4e^{-x}\}$

$= (D-1)^2\{(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}) - x^4e^{-x}\} = (D-1)^2(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)\{(D-1)(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)\{(12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - 8x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x}) - (4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 12x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x} - 4x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x})$

$$= \left(24xe^{-x} - 12x^2e^{-x} - 48x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}\right)$$
$$- \left(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x}\right)$$

$$= 24xe^{-x} - 60x^2e^{-x} + 32x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x} - 12x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}$$

$$= \underline{24xe^{-x} - 72x^2e^{-x} + 48x^3e^{-x} - 8x^4e^{-x}}$$

(7) $(D^2+D+1)(e^x\cos 2x) = e^x\cos 2x + D(e^x\cos 2x) + D^2(e^x\cos 2x)$

$$= e^x\cos 2x + \left(e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x\right) + \left\{e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x - 2\left(e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x\right)\right\}$$

$$= \cancel{2e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x + \cancel{e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x - 2e^x\sin 2x - \cancel{4e^x\cos 2x}$$

$$= \underline{-e^x\cos 2x - 6e^x\sin 2x}$$

(8) $(D-1)(D^2-2D+3)(e^{2x}\sin x)$

$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2D(e^{2x}\sin x) + D^2(e^{2x}\sin x)\right\}$$

$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2\left(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) + \left(4e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right)\right\}$$

$$= (D-1)\left(\cancel{3e^{2x}\sin x} - \cancel{4e^{2x}\sin x} - 2e^{2x}\cos x + 3e^{2x}\sin x + 4e^{2x}\cos x\right)$$

$$= (D-1)\left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$

$$= \left(\cancel{4e^{2x}\sin x} + 2e^{2x}\cos x + 4e^{2x}\cos x - \cancel{2e^{2x}\sin x}\right) - \left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$

$$= \cancel{2e^{2x}\sin x} + 6e^{2x}\cos x - \cancel{2e^{2x}\sin x} - 2e^{2x}\cos x = \underline{4e^{2x}\cos x}$$

$\boxed{2}$ (1) $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6)=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$ より. $\lambda=1,-2,3$

よって基本解は e^x, e^{-2x}, e^{3x}. ゆえに. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}+c_3e^{3x}$

(2) $\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ より.

$\lambda=2,-1$ (2重解). よって基本解は e^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}. ゆえに. $y=c_1e^{2x}+(c_2+c_3x)e^{-x}$.

(3) $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), -1 (2重解). よって

基本解は. $e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}$. よって $y=(c_1+c_2x)e^x+(c_3+c_4x)e^{-x}$.

(4) $(\lambda^2+\lambda+1)^2=\left\{(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right\}^2=0$ より. $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2重解). よって.

基本解は. $e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $xe^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$. ゆえに

$y=(c_1+c_2x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+(c_3+c_4x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

(5) $(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+5)=(\lambda-1)^2\{(\lambda-1)^2+4\}=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), $\lambda=1\pm2i$

よって基本解は $e^x, xe^x, e^x\sin2x, e^x\cos2x$.

ゆえに $y=(c_1+c_2x)e^x+e^x(c_3\sin2x+c_4\cos2x)$

(6) $(\lambda+2)^3(\lambda^2-4\lambda+5)^2=(\lambda+2)^3\{(\lambda-2)^2+1\}^2=0$ より. $\lambda=-2$ (3重解),

$\lambda=2\pm i$ (2重解). よって基本解は $e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\sin x$,

$e^{2x}\cos x, xe^{2x}\cos x$. ゆえに

$y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-2x}+(c_4+c_5x)e^{2x}\sin x+(c_6+c_7x)e^{2x}\cos x$.

$\boxed{3}$ 与式は定数係数3階同次線形なので一般解の形より、基本解は e^{-x},

$e^{x}\sin\sqrt{2}x$, $e^{x}\cos\sqrt{2}x$. よって特性方程式の解は $\lambda=-1,\ 1\pm\sqrt{2}i$. ゆえに.

特性多項式は $(\lambda+1)\{(\lambda-1)^2+2\}=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+3)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda+3$.

一方、与式の特性多項式は $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$. 両者を比較して、$a=-1,\ b=1,\ c=3$.

問題1.4.2

[1] 推測特殊解y_0は次の通り.

(1) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (2) $y_0 = a\sin x + b\cos x$ (3) $y_0 = ae^x$ (4) $y_0 = a\sin x + b\cos x$

(5) $y_0 = (a_0x + a_1)e^{-x}$ (6) $y_0 = (a_0x^2 + a_1x + a_2)e^{2x}$ (7) $y_0 = ae^{2x}\sin 3x + be^{2x}\cos 3x$

(8) $y_0 = ae^{-x}\sin x + be^{-x}\cos x$

[2] 推測特殊解y_0は次の通り

(1) 基本解が定数関数を含むので $y_0 = x(a_0x^2 + a_1x + a_2)$

(2) 特性方程式は0を2重解にもつので. $y_0 = x^2(a_0x + a_1)$

(3) e^{-3x}は基本解なので. $e^{-3x} \to axe^{-3x}$. ところが axe^{-3x}も基本解の定数倍なので

$axe^{-3x} \to ax^2e^{-3x}$. よって $y_0 = ax^2e^{-3x}$

(4) $2\cos 3x$は基本解の定数倍なので. $y_0 = x(a\sin 3x + b\cos 3x)$

(5) $e^x\cos x$は基本解なので, $y_0 = x(ae^x\sin x + be^x\cos x)$

(6) e^xは基本解なので, $e^x \to axe^x$. ところが axe^xも基本解の定数倍なので.

$axe^x \to ax^2e^x$. よって. $y_0 = ax^2e^x$

[3] (1) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, $\dfrac{1}{2} \to a$, $\dfrac{1}{2}\cos 2x \to b\sin 2x + c\cos 2x$

$\therefore y_0 = a + b\sin 2x + c\cos 2x$

(2) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. 基本解が定数関数を含むので. $\dfrac{1}{2} \to ax$

また $-\frac{1}{2}\cos 2x \to b\sin 2x + c\cos 2x$ $\therefore y_0 = ax + b\sin 2x + c\cos 2x$

(3) $2\cos x \cdot \cos 2x = \cos x + \cos 3x$, $\cos x \to a_1\sin x + a_2\cos x$, $\cos 3x \to b_1\sin 3x + b_2\cos 3x$

$\therefore y_0 = a_1\sin x + a_2\cos x + b_1\sin 3x + b_2\cos 3x$

(4) $(e^x+1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$, $e^{2x} \to ae^{2x}$, $2e^x \to be^x$, $1 \to c$

$\therefore y_0 = ae^{2x} + be^x + c$