PAPER 14.1

$\boxed{1}$ (1) $(3D+2)x^2 = 3Dx^2 + 2x^2 = 6x + 2x^2$

(2) $(D^3-2D^2+D-4)x^4 = -4x^4 + Dx^4 - 2D^2x^4 + D^3x^4$

$= -4x^4 + 4x^3 - 2(12x^2) + 24x = -4x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 24x$

(3) $(D-1)(D+2)e^{2x} = (D-1)(De^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(2e^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(4e^{2x})$

$= -4e^{2x} + D(4e^{2x}) = -4e^{2x} + 8e^{2x} = 4e^{2x}$

(4) $(D+4)(D-1)(e^x + \cos x) = (D+4)\{D(e^x + \cos x) - (e^x + \cos x)\}$

$= (D+4)(\cancel{e^x} - \sin x - \cancel{e^x} - \cos x) = (D+4)(-\sin x - \cos x)$

$= D(-\sin x - \cos x) + 4(-\sin x - \cos x) = -\cos x + \sin x - 4\sin x - 4\cos x$

$= -3\sin x - 5\cos x$

(5) $(D+1)(D+2)(D+3)\sin x = (D+1)(D+2)(\cos x + 3\sin x)$

$= (D+1)\{(-\sin x + 3\cos x) + 2(\cos x + 3\sin x)\} = (D+1)(5\sin x + 5\cos x)$

$= 5\cos x - \cancel{5\sin x} + \cancel{5\sin x} + 5\cos x = 10\cos x$

(6) $(D-1)^3(x^4e^{-x}) = (D-1)^2\{(D-1)x^4e^{-x}\}$

$= (D-1)^2\{(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}) - x^4e^{-x}\} = (D-1)^2(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)\{(D-1)(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)\{(12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - 8x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x}) - (4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 12x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x} - 4x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x})$

$$= \left(24xe^{-x} - 12x^2e^{-x} - 48x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}\right)$$
$$- \left(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x}\right)$$
$$= 24xe^{-x} - 60x^2e^{-x} + 32x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x} - 12x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}$$
$$= \underline{24xe^{-x} - 72x^2e^{-x} + 48x^3e^{-x} - 8x^4e^{-x}}$$

(7) $(D^2+D+1)(e^x\cos 2x) = e^x\cos 2x + D(e^x\cos 2x) + D^2(e^x\cos 2x)$

$$= e^x\cos 2x + \left(e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x\right) + \left\{e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x - 2\left(e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x\right)\right\}$$
$$= \cancel{2e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x + \cancel{e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x - 2e^x\sin 2x - 4\cancel{e^x}\cos 2x$$
$$= \underline{-e^x\cos 2x - 6e^x\sin 2x}$$

(8) $(D-1)(D^2-2D+3)(e^{2x}\sin x)$

$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2D(e^{2x}\sin x) + D^2(e^{2x}\sin x)\right\}$$
$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2\left(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) + \left(4e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right)\right\}$$
$$= (D-1)\left(\cancel{3e^{2x}\sin x} - 4\cancel{e^{2x}}\sin x - 2e^{2x}\cos x + 3e^{2x}\sin x + 4e^{2x}\cos x\right)$$
$$= (D-1)\left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$
$$= \left(\cancel{4e^{2x}\sin x} + 2e^{2x}\cos x + 4e^{2x}\cos x - \cancel{2e^{2x}\sin x}\right) - \left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$
$$= \cancel{2e^{2x}\sin x} + 6e^{2x}\cos x - \cancel{2e^{2x}\sin x} - 2e^{2x}\cos x = \underline{4e^{2x}\cos x}$$

[2] (1) $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6)=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$ より. $\lambda=1,-2,3$

よって基本解は e^x, e^{-2x}, e^{3x}. ゆえに. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{3x}$

(2) $\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ より.

$\lambda=2,-1$ (2重解). よって基本解は e^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}. ゆえに. $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$.

(3) $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), -1 (2重解). よって

基本解は. $e^x, xe^x, e^{-x}, xe^{-x}$. よって $y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-x}$.

(4) $(\lambda^2+\lambda+1)^2=\left\{(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right\}^2=0$ より. $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2重解). よって.

基本解は. $e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$. ゆえに

$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+(C_3+C_4x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

(5) $(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+5)=(\lambda-1)^2\{(\lambda-1)^2+4\}=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), $\lambda=1\pm2i$

よって基本解は $e^x, xe^x, e^x\sin2x, e^x\cos2x$.

ゆえに $y=(C_1+C_2x)e^x+e^x(C_3\sin2x+C_4\cos2x)$

(6) $(\lambda+2)^3(\lambda^2-4\lambda+5)^2=(\lambda+2)^3\{(\lambda-2)^2+1\}^2=0$ より. $\lambda=-2$ (3重解),

$\lambda=2\pm i$ (2重解). よって基本解は $e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\sin x,$

$e^{2x}\cos x, xe^{2x}\cos x$. ゆえに

$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-2x}+(C_4+C_5x)e^{2x}\sin x+(C_6+C_7x)e^{2x}\cos x$.

$\boxed{3}$ 与式は定数係数3階同次線形なので一般解の形より、基本解は e^{-x},
$e^{x}\sin\sqrt{2}x$, $e^{x}\cos\sqrt{2}x$. よって特性方程式の解は $\lambda=-1,\ 1\pm\sqrt{2}i$. ゆえに.
特性多項式は $(\lambda+1)\{(\lambda-1)^2+2\}=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+3)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda+3$.
一方、与式の特性多項式は $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$. 両者を比較して、$a=-1,\ b=1,\ c=3$.