問題1.3.1

1 (1) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(-2-4x+x^2-x^3)=0$ とおくと

$(c_1+c_2-2c_3)+(c_1+2c_2-4c_3)x+(3c_1+c_3)x^2+(-c_2-c_3)x^3=0$. 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2-2c_3=0 \\ c_1+2c_2-4c_3=0 \\ 3c_1 \quad\; +c_3=0 \\ \quad\; c_2+c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore c_1=c_2=c_3=0$$

ゆえに. 1次独立

(2) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(1+3x-3x^2-2x^3)=0$ とおくと

$(c_1+c_2+c_3)+(c_1+2c_2+3c_3)x+(3c_1-3c_3)x^2+(-c_2-2c_3)x^3=0$ 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+3c_3=0 \\ c_1 \quad\; -c_3=0 \\ \quad\; c_2+2c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} c_1-c_3=0 \\ c_2+2c_3=0 \end{cases}$$

. ここで $c_3=t$ とおくと.

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. $t=1$ とおくと $c_1=c_3=1$, $c_2=-2$. ゆえに. 1次従属.

実際, $1+3x-3x^2-2x^3=-(1+x+3x^2)+2(1+2x-x^3)$

(3) $c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x=0$ とおくと $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x=0$ $\therefore c_1+c_2x+c_3x^2=0$

$x=0$ とおくと $c_1=0$. このとき. $c_2x+c_3x^2=0$. $x=\pm1$ とおくと. $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$.

よって. $c_2=c_3=0$ $\therefore c_1=c_2=c_3=0$ $\therefore$ 1次独立

(4) $c_1+c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$ とおく $x=0$ とおくと $c_1=0$. このとき. $c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$.

$x=\pm\pi/2$ とおくと $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$ $\therefore c_2=c_3=0$ $\therefore c_1=c_2=c_3=0$ $\therefore$ 1次独立

[2] (1) $c_1y_1+c_2y_2=c_1x^3+c_2|x|^3=0$ とおく　$x=\pm1$ のとき．$c_1+c_2=0$，$-c_1+c_2=0$
∴ $c_1=c_2=0$　よって y_1, y_2 は1次独立

(2) $x\geqq0$ のときは．$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix}=3x^5-3x^5=0$

$x<0$ のときは　$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix}=-3x^5-(-3x^5)=0$

以上より．すべての x で $W(y_1,y_2)=0$

[3] (1) $y=x^m$ とおくと．$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$．これらを与式に代入：
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+x\cdot mx^{m-1}-2x^m=0$　∴ $(m^2-2)x^m=0$　∴ $m=\pm\sqrt{2}$．よって．$y_1=x^{\sqrt{2}}$，
$y_2=x^{-\sqrt{2}}$ が特殊解．$y_1/y_2=x^{2\sqrt{2}}$ は定数でないので．一般解は $y=c_1x^{\sqrt{2}}+c_2x^{-\sqrt{2}}$

(2) $y=x^m$ とおくと．$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$．これらを与式に代入：
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+4x\cdot mx^{m-1}-4x^m=0$　∴ $(m^2+3m-4)x^m=0$　∴ $m^2+3m-4=0$
∴ $(m+4)(m-1)=0$　∴ $m=1,-4$．よって．$y_1=x$，$y_2=x^{-4}$ は特殊解．$y_1/y_2=x^5$ は定数
でないので．一般解は $y=c_1x+c_2/x^4$．

[4] (1) $P=\frac{1}{x}$，$y_1=x^2$．よって．$\int Pdx=\int\frac{dx}{x}=\log x$　∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int\frac{1}{x^4}\cdot e^{-\log x}dx$

$=\int\frac{dx}{x^5}=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}=-\frac{1}{4}x^{-4}$　∴ $y_2=x^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)=-\frac{1}{4}x^{-2}$

∴ $y=c_1x^2-\frac{c_2}{4}x^{-2}$　∴ $y=c_1x^2+c_2/x^2$　$\left(-\frac{c_2}{4}\to c_2\right)$

(2) $P=-\frac{x+1}{x}=-1-\frac{1}{x}$，$y_1=e^x$．よって．$\int Pdx=-x-\log x$

∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int e^{-2x}\cdot e^{x+\log x}dx=\int xe^{-x}dx=x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$　∴ $y_2=e^x\{-(x+1)e^{-x}\}=-(x+1)$．

∴ $y=c_1e^x-c_2(x+1)$　∴ $y=c_1(x+1)+c_2e^x$　$(c_1\to c_2,\ -c_2\to c_1)$

(3) $P = -\frac{5}{x}$, $y_1 = x^3$ より $\int P\,dx = -5\log x = -\log x^5$ $\therefore e^{-\int P\,dx} = e^{\log x^5} = x^5$

$\therefore y_2 = x^3 \cdot \int x^{-6} \cdot x^5\,dx = x^3 \int \frac{dx}{x} = x^3 \cdot \log|x|$ $\therefore \underline{y = C_1 x^3 + C_2 x^3 \log|x|}$