問題1.2.6

$\boxed{1}$ (1) $y'''=\frac{1}{x}$ $\therefore y''=\log x+c_1$, $y'=x\log x-x+c_1x+c_2$

$y=\int x\log x\,dx-\frac{x^2}{2}+\frac{c_1}{2}x^2+c_2x+c_3$.

ここで $\int x\log x\,dx=x(x\log x-x)-\int(x\log x-x)dx=x^2\log x-x^2-\int x\log x\,dx+\frac{x^2}{2}$

$\therefore 2\int x\log x\,dx=x^2\log x-\frac{x^2}{2}$ $\therefore \int x\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}$

ゆえに $y=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{3}{4}x^2+c_1x^2+c_2x+c_3$ $\left(\frac{c_1}{2}\to c_1\right)$.

(2) $p=y'$ とおくと $y''=\frac{dp}{dx}$ よって与式は $\frac{dp}{dx}+p=2e^{x}$.

まず $\frac{dp}{dx}+p=0$ を解く. $\frac{dp}{dx}=-p$ $\therefore \frac{dp}{p}=-dx$ $\therefore \log p=-x+c=\log e^{c}\cdot e^{-x}$

$\therefore p=e^{c}\cdot e^{-x}$ $\therefore p=c\cdot e^{-x}$. ゆえに $p=v\cdot e^{-x}$ が与式を満足するように v を定める.

$\frac{dp}{dx}=-e^{-x}\cdot v+e^{-x}\frac{dv}{dx}$ これらを与式に代入: $-e^{-x}\cdot v+e^{-x}\frac{dv}{dx}+ve^{-x}=2e^{x}$

$\therefore \frac{dv}{dx}=2e^{2x}$ $\therefore v=2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)+c_1=e^{2x}+c_1$ $\quad p=e^{-x}(e^{2x}+c_1)$

$\therefore y'=e^{x}+c_1e^{-x}$ $\therefore y=e^{x}-c_1e^{-x}+c_2$ $\therefore y=c_1e^{-x}+c_2+e^{x}$

(3) $p=y'$ とおいて y を独立変数, p を y の関数と考える.

$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$ これらを与式に代入: $yp\cdot\frac{dp}{dy}+p^2+1=0$

$\therefore yp\frac{dp}{dy}=-(p^2+1)$ $\therefore \frac{p}{p^2+1}dp=-\frac{dy}{y}$ $\therefore \frac{1}{2}\int\frac{2p}{p^2+1}dp=-\log y+c$

$\therefore \frac{1}{2}\log(p^2+1)=-\log y+c$ $\therefore \log(p^2+1)=-2\log y+2c=\log\frac{e^{2c}}{y^2}$

$\therefore p^2+1=\frac{e^{2c}}{y^2}$ $\therefore p^2=\frac{c_1}{y^2}-1$ $\therefore p^2=\frac{c_1-y^2}{y^2}$ $\therefore p=\pm\frac{\sqrt{c_1-y^2}}{y}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{c_1-y^2}}{y}$ $\therefore \frac{y}{\sqrt{c_1-y^2}}dy=\pm dx$ $\therefore \int\frac{y}{\sqrt{c_1-y^2}}dy=\pm x+c_2$

$\therefore -\sqrt{c_1-y^2}=\pm x+c_2$ $\therefore \sqrt{c_1-y^2}=\mp x+c_2$ $\therefore c_1-y^2=x^2\mp 2c_2x+c_2^2$

$\therefore x^2+y^2=\mp 2c_2x+(c_1+c_2^2)$ $\quad\therefore x^2+y^2=C_1x+C_2$

(4) $p=y'$ とおいて. yを独立変数, pをyの関数と考える.

$y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ これらを与式に代入 $\quad yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=2p$

$\therefore yp\dfrac{dp}{dy}=p^2+2p \quad \therefore y\dfrac{dp}{dy}=p+2 \quad \therefore \dfrac{dp}{p+2}=\dfrac{dy}{y} \quad \therefore \log(p+2)=\log y+c$

$\therefore p+2=e^c\cdot y \quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=c_1y-2 \quad \therefore \dfrac{dy}{c_1y-2}=dx \quad \therefore \dfrac{1}{c_1}\log(c_1y-2)=x+c_2$

$\therefore \log(c_1y-2)=c_1x+c_1c_2 \quad \therefore c_1y-2=e^{c_1x+c_1c_2} \quad \therefore y=\dfrac{e^{c_1c_2}}{c_1}e^{c_1x}+\dfrac{2}{c_1}$

$\therefore y=c_2e^{c_1x}+\dfrac{2}{c_1}$

(5) $p=y''$ とおくと $p\dfrac{dp}{dx}=1 \quad \therefore p\,dp=dx \quad \therefore \dfrac{p^2}{2}=x+c \quad \therefore p^2=2x+2c \quad \therefore p^2=2x+c_1$

$\therefore y''=\pm\sqrt{2x+c_1} \quad \therefore y'=\pm\dfrac{1}{3}(2x+c_1)^{\frac{3}{2}}+c_2 \quad \therefore y=\pm\dfrac{1}{15}(2x+c_1)^{\frac{5}{2}}+c_2x+c_3$

(6) $p=y''$ とおくと $y'''=\dfrac{dp}{dx}$. これらを与式に代入: $\dfrac{dp}{dx}+2p=0 \quad \therefore \dfrac{dp}{dx}=-2p$

$\therefore \dfrac{dp}{p}=-2dx \quad \therefore \log p=-2x+c_1 \quad \therefore p=e^{c_1}\cdot e^{-2x} \quad \therefore y''=c_1e^{-2x}$

$\therefore y'=-\dfrac{c_1}{2}e^{-2x}+c_2 \quad \therefore y=\dfrac{c_1}{4}e^{-2x}+c_2x+c_3 \quad \therefore y=c_1e^{-2x}+c_2x+c_3$

(7) $p=y''$ とおくと $y^{(4)}=\dfrac{d^2p}{dx^2}$. これらを与式に代入: $4\dfrac{d^2p}{dx^2}=p \quad \therefore \dfrac{d^2p}{dx^2}=\dfrac{1}{4}p$

両辺に $2\dfrac{dp}{dx}$ をかけると $2\dfrac{dp}{dx}\cdot\dfrac{d^2p}{dx^2}=\dfrac{1}{2}p\dfrac{dp}{dx} \quad \therefore \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2=\dfrac{p}{2}\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore \left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2=\displaystyle\int\dfrac{p}{2}dp=\dfrac{p^2}{4}+c_1 \quad \therefore \dfrac{dp}{dx}=\pm\dfrac{\sqrt{p^2+4c_1}}{2} \quad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{p^2+4c_1}}\dfrac{dp}{dx}=\pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore \displaystyle\int\dfrac{dp}{\sqrt{p^2+4c_1}}=\pm\dfrac{x}{2}+c_2 \quad \therefore \log(p+\sqrt{p^2+4c_1})=\pm\dfrac{x}{2}+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}$

$\therefore\ p+\sqrt{p^2+4c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}\ \cdots ①$

ここで $(p+\sqrt{p^2+4c_1})(p-\sqrt{p^2+4c_1})=p^2-(p^2+4c_1)=-4c_1$ であるから ①より

$$p-\sqrt{p^2+4c_1}=-\frac{4c_1}{e^{c_2}}e^{\mp\frac{x}{2}}\ \cdots ②$$

①,②より $2p=e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}-4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$ $\therefore\ y''=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm\frac{x}{2}}-2c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$

$\therefore\ y'=\pm e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3$

$\therefore\ y=\pm 2e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 8c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3x+c_4$ $\therefore\ \underline{y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{-\frac{x}{2}}+c_3x+c_4}$

(8) $p=y''$ とおくと $y^{(4)}=\frac{d^2p}{dx^2}$. よって与式は $\frac{d^2p}{dx^2}=p-1$. 両辺に $2\frac{dp}{dx}$ をかけると

$2\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}=2(p-1)\frac{dp}{dx}$ $\therefore\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2(p-1)\frac{dp}{dx}$

$\therefore\ \left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2\int(p-1)dp+c_1=(p-1)^2+c_1$ $\therefore\ \frac{dp}{dx}=\pm\sqrt{(p-1)^2+c_1}$

$\therefore\ \frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm 1$ $\therefore\ \int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm x+c_2$

ここで

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}\ \frac{q=p-1}{dq=dp}\ \int\frac{dq}{\sqrt{q^2+c_1}}=\log\left(q+\sqrt{q^2+c_1}\right)$$

$$=\log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)$$

$\therefore\ \log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)=\pm x+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm x}$

$\therefore\ p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm x}\ \cdots ①$

ここで

$(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1})(p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1})=(p-1)^2-(p-1)^2-c_1=-c_1$

$\therefore\ p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1}=-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}\ \cdots ②$

①,②より. $2(p-1)=e^{c_2}e^{\pm x}-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}$

$\therefore p=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm x}-\frac{c_1e^{-c_2}}{2}e^{\mp x}+1$ $\therefore y''=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+1$

$\therefore y'=c_1e^{x}-c_2e^{-x}+x+c_3$ $\therefore \underline{y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4}$

$\boxed{2}$ 題意より. $\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=y'$ $(x\geq 0)$. 両辺をxで微分すると $y''=\sqrt{1+(y')^2}$.

よって この方程式を初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ のもとで解けば良い.

$p=y'$とおくと $y''=\frac{dp}{dx}$. これらを与式に代入. $\frac{dp}{dx}=\sqrt{p^2+1}$ $\therefore \frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=dx$

$\therefore \int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=x+c_1$ $\therefore \log(p+\sqrt{p^2+1})=x+c_1$ $\therefore p+\sqrt{p^2+1}=e^{c_1}e^{x}$ …①

ここで $(p+\sqrt{p^2+1})(p-\sqrt{p^2+1})=p^2-(p^2+1)=-1$

$\therefore p-\sqrt{p^2+1}=-\frac{1}{p+\sqrt{p^2+1}}=-e^{-c_1}e^{-x}$ …②

①,②より. $2p=e^{c_1}e^{x}-e^{-c_1}e^{-x}$ $\therefore y'=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}-\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}$

$\therefore y=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}+\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}+c_2$. $y(0)=1$, $y'(0)=0$より. $\begin{cases}\frac{e^{c_1}}{2}+\frac{e^{-c_1}}{2}+c_2=1 & \cdots ③\\ \frac{e^{c_1}}{2}-\frac{e^{-c_1}}{2}=0 & \cdots ④\end{cases}$

④より. $e^{c_1}=e^{-c_1}$ $\therefore c_1=-c_1$ $\therefore c_1=0$. よって ③より. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+c_2=1$ $\therefore c_2=0$

ゆえに $\underline{y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$