問題1.2.5

□1 (1) $y = x + px$. 両辺をxで微分すると. $\cancel{p} = 1 + x\dfrac{dp}{dx} + \cancel{p}$ $\therefore x\dfrac{dp}{dx} = -1$

$\therefore \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{x}$ $\therefore p = -\log x + c$. これを与式に代入して. $x(-\log x + c) = y - x$

$\therefore y = x(1 + c - \log x)$

(2) $xy = x + p$ $\therefore y = 1 + \dfrac{p}{x}$. 両辺を$x$で微分: $p = \dfrac{\frac{dp}{dx}\cdot x - p}{x^2}$

$\therefore x^2 p = x\dfrac{dp}{dx} - p$ $\therefore x\dfrac{dp}{dx} = (x^2+1)p$ $\therefore \dfrac{dp}{p} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \log p = \dfrac{x^2}{2} + \log x + c$ $\therefore p = e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c}$. これを与式に代入:

$e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c} = xy - x$ $\therefore \dfrac{x^2}{2} + \cancel{\log x} + c = \cancel{\log x} + \log(y-1)$ $\therefore y - 1 = e^{\frac{x^2}{2} + c}$

$\therefore y = e^c e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ $\therefore y = c\,e^{\frac{x^2}{2}} + 1$

(3) $y = \dfrac{1}{3}(p^3 + 3p^2)$. 両辺を$x$で微分. $p = \dfrac{1}{3}\left(3p^2\dfrac{dp}{dx} + 6p\dfrac{dp}{dx}\right)$

$\therefore p = (p^2 + 2p)\dfrac{dp}{dx}$ $\therefore (p+2)\dfrac{dp}{dx} = 1$ $\therefore \dfrac{1}{2}(p+2)^2 = x + c$ $\therefore x = \dfrac{1}{2}(p+2)^2 - c$.

pを媒介変数tで置き換えると $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t+2)^2 - c \\ y = \dfrac{1}{3}(t^3 + 3t^2) \end{cases}$

(4) $3xp = y - y^2p^2$ $\therefore x = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y}{p} - py^2\right)$. 両辺を$y$で微分:

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} - y^2\dfrac{dp}{dy} - p(2y)\right)$ $\therefore \dfrac{y(1+yp^2)}{p}\dfrac{dp}{dy} = -2(1+yp^2)$

$\therefore \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{2}{y}dy$ $\therefore \log p = -2\log y + c$ $\therefore p = \dfrac{e^c}{y^2}$ $\therefore p = \dfrac{c}{y^2}$.

これを与式に代入して. pを消去すると. $x = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y^3}{c} - c\right)$ $\therefore y^3 = c(3x + c)$

(5) $y = xp + x\sqrt{1+p^2}$. 両辺をxで微分: $p = p + x\frac{dp}{dx} + \sqrt{1+p^2} + x\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$

$\therefore \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}dp = -\frac{1}{x}dx \quad \therefore \int\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{1+p^2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right\}dp = -\log x + c$

$\therefore \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log(p+\sqrt{1+p^2}) = -\log x + c = \log\frac{e^c}{x}$

$\therefore x = \frac{e^c}{\sqrt{1+p^2}\,(p+\sqrt{1+p^2})} \quad \therefore x = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}\,(p+\sqrt{1+p^2})} \quad (e^c \to c)$

これを与式に代入:

$y = \cancel{(p+\sqrt{1+p^2})}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+p^2}\,\cancel{(p+\sqrt{1+p^2})}} = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}$.

pを媒介変数tで置き換えると $\begin{cases} x = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}\,(t+\sqrt{1+t^2})} \\ y = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

さらに、上式からtを消去すると. $x^2+y^2 = 2cx$

(6) $e^{2y} = \frac{1-p}{p^2}e^{4x}$. 両辺の対数をとると $2y = \log(1-p) - 2\log p + 4x$

$\therefore y = \frac{1}{2}\log(1-p) - \log p + 2x \cdots ①$

上式の両辺をxで微分: $p = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1-p}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} + 2$

$\therefore \frac{-\cancel{(p-2)}}{p(p-1)}\frac{dp}{dx} = 2\cancel{(p-2)} \quad \therefore \frac{dp}{p(p-1)} = -2dx$

$\therefore \int\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right\}dp = -2x + c \quad \therefore \log(p-1) - \log p = -2x + c$

$\therefore \log\frac{p}{p-1} = 2x - c \quad \therefore \frac{p}{p-1} = c_1 e^{2x} \ (e^c \to c_1) \quad \therefore p = c_1 e^{2x}(p-1)$

$\therefore p = \frac{c_1 e^{2x}}{c_1 e^{2x} - 1}$. これを①に代入する.

$$2y=\log\left(1-\frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}\right)-2\log\frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}+4x$$

$$=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{(c_1e^{2x})^2}+4x=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2e^{4x}}+\log e^{4x}=\log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}$$

$\therefore\ e^{2y}=\dfrac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}$ $\quad\therefore\ e^{2y}=\dfrac{1}{c_1^2}-\dfrac{1}{c_1}e^{2x}$

$\boxed{2}$ (1) $p^2+5yp+6y^2=(p+2y)(p+3y)$. $p+2y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-2y$ $\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-2dx$

$\therefore\ \log y=-2x+c_1$ $\therefore\ y=e^{c_1}e^{-2x}$ $\therefore\ y=c_1e^{-2x}$. 一方. $p+3y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-3y$

$\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-3dx$ $\therefore\ \log y=-3x+c_2$ $\therefore\ y=e^{c_2}\cdot e^{-3x}$ $\therefore\ y=c_2e^{-3x}$. 以上より.

$(y-ce^{-2x})(y-ce^{-3x})=0$

(2) $x^2p^2+3xyp+2y^2=(xp+2y)(xp+y)$ $\quad xp+2y=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2y}{x}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{2}{x}dx$ $\therefore\ \log y=-2\log x+c_1$ $\therefore\ y=\dfrac{e^{c_1}}{x^2}$ $\therefore\ y=\dfrac{c_1}{x^2}$

一方. $xp+y=0$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ $\therefore\ \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore\ \log y=-\log x+c_2$ $\therefore\ y=\dfrac{e^{c_2}}{x}$

$\therefore\ y=\dfrac{c_2}{x}$. 以上より. $\left(y-\dfrac{c}{x^2}\right)\left(y-\dfrac{c}{x}\right)=0$

(3) $x^2p^2+xy(1+y)p+y^3=(xp+y)(xp+y^2)$. $xp+y=0$ より. $y=\dfrac{c_1}{x}$ ((2)の解を見よ). $xp+y^2=0$ より. $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{x}$ $\therefore\ -\dfrac{dy}{y^2}=\dfrac{dx}{x}$ $\therefore\ \dfrac{1}{y}=\log x+c_2$

$\therefore\ y=\dfrac{1}{\log x+c_2}$. 以上より. $\left(y-\dfrac{c}{x}\right)\left(y-\dfrac{1}{\log x+c}\right)=0$

(4) $p(p+y)=x(x+y)$ $\therefore\ p^2+py-x^2-xy=0$ $\therefore\ (p-x)(p+x)+y(p-x)=0$

$\therefore (p-x)(p+x+y)=0$　$p-x=0$より. $\dfrac{dy}{dx}=x$ $\therefore y=\dfrac{x^2}{2}+c_1$.

一方. $p+x+y=0$より. $y'+y=-x$ ← 1階線形 (*)

① $y'+y=0$を解く: $\dfrac{dy}{dx}=-y$ $\therefore \dfrac{dy}{y}=-dx$ $\therefore \log y=-x+c_2$ $\therefore y=e^{c_2}\cdot e^{-x}$

$\therefore y=c_2e^{-x}$

② $y=v\cdot e^{-x}$が(*)を満たすようにvを定める: $y'=v'e^{-x}+v(-e^{-x})$. これらを(*)に代入:

$v'e^{-x}-\cancel{ve^{-x}}+\cancel{ve^{-x}}=-x$ $\therefore v'=-xe^{x}$ $\therefore v=-\int xe^{x}dx+c_2$

$\therefore v=-\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)+c_2=-xe^{x}+e^{x}+c_2$

$\therefore y=e^{-x}\left(-xe^{x}+e^{x}+c_2\right)=-x+1+c_2e^{-x}$

以上より. $\underline{\left(y-\dfrac{x^2}{2}-c\right)\left(y-1+x-ce^{-x}\right)=0}$

$\boxed{3}$ (a) 与式の両辺をxで微分すると $p=p+x\dfrac{dp}{dx}+f'(p)\dfrac{dp}{dx}$. ゆえに、

$(x+f'(p))\dfrac{dp}{dx}=0$ $\therefore x+f'(p)=0$ または $\dfrac{dp}{dx}=0$. 後者より. $p=c$ (cは任意定数).

これを与式に代入して得られる式 $y=cx+f(c)$は任意定数を1つ含む与式の解になっているので一般解である.

(b) $p=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-f'(t)-tf''(t)+f'(t)}{-f''(t)}=t$. よって. $x=-f'(p)$,

$y=-pf'(p)+f(p)$. ゆえに $y=xp+f(p)$となるので, 与式の解である. また $t=p=\dfrac{dy}{dx}$

とおくと. この解の媒介変数表示は $\begin{cases} x=-f'(t) \\ y=-tf'(t)+f(t) \end{cases}$ となる. tは定数ではないので.

この解は直線ではない. よって (a)の一般解には含まれない ゆえに 特異解である.

(1) 一般解は $y=Cx-\log C$. 特異解: $f(t)=-\log t$ とおくと $f'(t)=-\dfrac{1}{t}$. よって

$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=1-\log t=1+\log\dfrac{1}{t} \end{cases}$ $\therefore\ y=1+\log x$

(2) 一般解は $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$. 特異解: $f(t)=\sqrt{1+t^2}$ とおくと $f'(t)=2t\left(\dfrac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. よって $\begin{cases} x=-\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=-\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+\sqrt{1+t^2}=\dfrac{-t^2+1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

ここで

$1-x^2=1-\dfrac{t^2}{1+t^2}=\dfrac{1+t^2-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1}{1+t^2}$ $\therefore\ \sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\therefore\ y=\sqrt{1-x^2}$

(3) 一般解は $y=Cx+C^2$. 特異解: $f(t)=t^2$ とおくと $f'(t)=2t$. よって

$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t^2+t^2 \end{cases}$ $\therefore\ y=-t^2=-\dfrac{1}{4}(-2t)^2=-\dfrac{1}{4}x^2$ $\therefore\ y=-\dfrac{x^2}{4}$

(4) 一般解は $y=Cx+\dfrac{1}{C}$. 特異解: $f(t)=\dfrac{1}{t}$ とおくと $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$. ゆえに

$\begin{cases} x=\dfrac{1}{t^2} \\ y=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t}=\dfrac{2}{t} \end{cases}$ $\therefore\ y^2=\dfrac{4}{t^2}=4x$ $\therefore\ y^2=4x$