問題1.2.4

1 (1) ① 完全性の確認：$P=\cos x+2xy,\ Q=x^2$ とおく $P_y=2x,\ Q_x=2x$
$\therefore P_y=Q_x \therefore$ 完全

① $U_x=\cos x+2xy$ となる$U$を求める：$U=\int(\cos x+2xy)dx+w(y)=\sin x+x^2y+w(y)$

② $U_y=x^2$ となるように$w(y)$を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=x^2 \therefore \frac{dw}{dy}=0 \therefore w(y)=0$

以上より $U=\sin x+x^2y \quad \therefore \sin x+x^2y=c$

(2) ① 完全性の確認：$P=2x+e^y,\ Q=xe^y$ とおく $P_y=e^y,\ Q_x=e^y \therefore P_y=Q_x$
$\therefore$ 完全

① $U_x=2x+e^y$ となる$U$を求める：$U=\int(2x+e^y)dx+w(y) \therefore U=x^2+xe^y+w(y)$

② $U_y=xe^y$ となるように$w(y)$を定める：$xe^y+\frac{dw}{dy}=xe^y \therefore \frac{dw}{dy}=0 \therefore w(y)=0$

以上より $U=x^2+xe^y \quad \therefore x^2+xe^y=c$

(3) ① 完全性の確認：$P=2xy,\ Q=1+x^2$ とおく $P_y=2x,\ Q_x=2x \therefore P_y=Q_x$
$\therefore$ 完全

① $U_x=2xy$ となる$U$を求める：$U=\int 2xy\,dx+w(y)=x^2y+w(y)$

② $U_y=1+x^2$ となるように$w(y)$を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=1+x^2 \therefore \frac{dw}{dy}=1 \therefore w(y)=y$

以上より $U=x^2y+y \quad \therefore x^2y+y=c$

(4) ① 完全性の確認：$P=x^3+2xy+y,\ Q=y^3+x^2+x$ とおく $P_y=2x+1,$
$Q_x=2x+1 \therefore P_y=Q_x \therefore$ 完全

① $U_x=x^3+2xy+y$ となる$U$を求める：$U=\int(x^3+2xy+y)dx+w(y)$

$\therefore U = \frac{x^4}{4} + x^2 y + yx + w(y)$

② $U_y = y^3 + x^2 + x$ となるように $w(y)$ を定める： $x^2 + x + \frac{dw}{dy} = y^3 + x^2 + x$ $\therefore \frac{dw}{dy} = y^3$

$\therefore w(y) = \frac{y^4}{4}$

以上より $U = \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4}$ $\therefore \frac{x^4}{4} + x^2 y + xy + \frac{y^4}{4} = c$

(5) ① 完全性の確認： $P = x^3 + 5xy^2$, $Q = 5x^2 y + 2y^3$ とおく. $P_y = 10xy$,

$Q_x = 10xy$ $\therefore P_y = Q_x$ $\therefore$ 完全

① $U_x = x^3 + 5xy^2$ となる $U$ を求める： $U = \int (x^3 + 5xy^2)\,dx + w(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 y^2 + w(y)$

② $U_y = 5x^2 y + 2y^3$ となるように $w(y)$ を定める： $5x^2 y + \frac{dw}{dy} = 5x^2 y + 2y^3$

$\therefore \frac{dw}{dy} = 2y^3$ $\therefore w(y) = \frac{y^4}{2}$

以上より $U = \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 y^2 + \frac{y^4}{2}$ $\therefore \frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 y^2 + \frac{y^4}{2} = c$

(6) ① 完全性の確認： $P = y^2 + e^x \sin y$, $Q = 2xy + e^x \cos y$ とおく $P_y = 2y + e^x \cos y$

$Q_x = 2y + e^x \cos y$ $\therefore P_y = Q_x$ $\therefore$ 完全

① $U_x = y^2 + e^x \sin y$ となる $U$ を求める： $U = \int (y^2 + e^x \sin y)\,dx + w(y) = xy^2 + e^x \sin y + w(y)$

② $U_y = 2xy + e^x \cos y$ となるように $w(y)$ を定める： $2xy + e^x \cos y + \frac{dw}{dy} = 2xy + e^x \cos y$

$\therefore \frac{dw}{dy} = 0$ $\therefore w(y) = 0$

以上より $U = xy^2 + e^x \sin y$ $\therefore xy^2 + e^x \sin y = c$

$\boxed{2}$ (1) $\frac{1}{\sin y}$ を両辺にかけると $dx+\frac{\cos y}{\sin y}dy=0$

① 完全性の確認：$P=1$, $Q=\frac{\cos y}{\sin y}$ とおくと $P_y=0$, $Q_x=0$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $U_x=1$ となる $U$ を求める：$U=x+w(y)$

② $U_y=\frac{\cos y}{\sin y}$ となるように $w(y)$ を求める：$\frac{dw}{dy}=\frac{\cos y}{\sin y}$ $\therefore w(y)=\log \sin y$

以上より $U=x+\log \sin y=\log(e^x \sin y)$ $\therefore \log(e^x\sin y)=c$ $\therefore e^x \sin y=e^c$

$\therefore e^x \sin y=c$

(2) $\frac{1}{x^2}$ を両辺にかけると $\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+x\,dy=0$

① 完全性の確認：$P=\frac{2}{x}+y$, $Q=x$ とおく。$P_y=1$, $Q_x=1$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $U_x=\frac{2}{x}+y$ となる $U$ を求める：$U=\int\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+w(y)$ $\therefore U=2\log x+xy+w(y)$

② $U_y=x$ となるように $w(y)$ を求める：$x+\frac{dw}{dy}=x$ $\therefore \frac{dw}{dy}=0$ $\therefore w(y)=0$

以上より $U=2\log x+xy$ $\therefore xy+2\log x=c$

(3) $e^y$ を両辺にかけると $(ye^y+e^y\cos x)dx+(xe^y+xye^y+e^y\sin x)dy=0$

① 完全性の確認：$P=ye^y+e^y\cos x$, $Q=xe^y+xye^y+e^y\sin x$ とおく。

$P_y=e^y+ye^y+e^y\cos x$, $Q_x=e^y+ye^y+e^y\cos x$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $U_x=ye^y+e^y\cos x$ となる $U$ を求める：$U=\int(ye^y+e^y\cos x)dx+w(y)$

$\therefore U=xye^y+e^y\sin x+w(y)$

② $u_y = xe^y + xye^y + e^y\sin x$ となるように $w(y)$ を定める：

$x(e^y + ye^y) + e^y\sin x + \frac{dw}{dy} = xe^y + xye^y + e^y\sin x$ ∴ $\frac{dw}{dy} = 0$ ∴ $w(y) = 0$

以上より $u = e^y(xy + \sin x)$ ∴ $e^y(xy + \sin x) = c$

(4) $\frac{1}{x^2+y^2}$ を両辺にかけると $\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

① 完全性の確認：$P = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ とおく $P_y = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$
$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q_x = -\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

∴ $P_y = Q_x$ ∴ 完全

① $u_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ となる $u$ を求める：$u = \int \frac{y}{x^2+y^2}dx + w(y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} + w(y)$

② $u_y = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ となるように $w(y)$ を定める：$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{dw}{dy} = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$

∴ $\cancel{\frac{-x}{x^2+y^2}} + \frac{dw}{dy} = 1 - \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}}$ ∴ $\frac{dw}{dy} = 1$ ∴ $w(y) = y$

以上より $u = \tan^{-1}\frac{x}{y} + y$ ∴ $\tan^{-1}\frac{x}{y} + y = c$

(5) $e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ を両辺にかけると $xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dx + (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dy = 0$

① 完全性の確認：$P = xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$, $Q = (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ とおく

$P_y = 3xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + xy^3\left(-yx^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

$Q_x = 2xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + (x^2y^2-1)\left(-xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (2xy^2 - x^3y^4 + xy^2)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$
$= (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

∴ $P_y = Q_x$ ∴ 完全

① $u_x = xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となる $u$ を求める：

$$u=\int xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dx + w(y) = y\left(-e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right)+w(y) = -ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}+w(y)$$

② $u_y=(x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となる $w(y)$ を求める：

$$-e^{-\frac{x^2y^2}{2}} - y\left(-yx^2 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) + \frac{dw}{dy} = (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}} \quad \therefore \frac{dw}{dy}=0 \quad \therefore w(y)=0$$

以上より $u=-ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ $\therefore ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}=c$

$\boxed{3}$ $\mu = x^m y^n$ とおいて与式の両辺にかける

(1) ① 積分因子：$P=2x^{m+1}y^{n+1}$, $Q=x^my^{n+2}-x^{m+2}y^n$ $\therefore P_y=2(n+1)x^my^n$,

$Q_x = mx^{m-1}y^{n+2}-(m+2)x^my^n$ $\begin{cases} m=0 \\ -(m+2)=2(n+1) \end{cases}$ $\therefore m=0,\ n=-2$ $\therefore \mu = \frac{1}{y^2}$

$P_y = Q_x$ とすると

よって $\frac{2x}{y}dx + \left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$ を解く

② $u_x=\frac{2x}{y}$ となる $u$ を求める．$u=\int \frac{2x}{y}dx + w(y) = \frac{x^2}{y}+w(y)$

③ $u_y = 1-\frac{x^2}{y^2}$ となる $w(y)$ を求める．$-\cancel{\frac{x^2}{y^2}}+\frac{dw}{dy} = 1-\cancel{\frac{x^2}{y^2}}$ $\therefore \frac{dw}{dy}=1$ $\therefore w(y)=y$

以上より $u=\frac{x^2}{y}+y$ $\therefore \frac{x^2}{y}+y=c$

(2) ① 積分因子：$P=x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}$, $Q=x^{m+1}y^{n+1}-x^{m+2}y^n$ とおく

$P_y=(n+1)x^{m+1}y^n+(n+2)x^my^{n+1}$, $Q_x=(m+1)x^my^{n+1}-(m+2)x^{m+1}y^n$

$P_y=Q_x$ とすると $\begin{cases} -(m+2)=n+1 \\ m+1=n+2 \end{cases}$ $\therefore m=-1,\ n=-2$ $\therefore \mu=\frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$ を解く

② $u_x = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ となるuを求める: $u = \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)dx + w(y) = \frac{x}{y} + \log x + w(y)$

③ $u_y = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める: $-\frac{x}{y^2} + \frac{dw}{dy} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy} = \frac{1}{y}$ ∴ $w(y) = \log y$

以上より $u = \frac{x}{y} + \log x + \log y$ ∴ $\frac{x}{y} + \log x + \log y = c$

(3) $P = x^m y^{n+2} - x^{m+1} y^{n+1}$, $Q = x^{m+2} y^n$ とおく. $P_y = (n+2)x^m y^{n+1} - (n+1)x^{m+1}y^n$,

$Q_x = (m+2)x^{m+1}y^n$ $P_y = Q_x$ となると $\begin{cases} n+2=0 \\ m+2=-(n+1) \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$ ∴ $\mu = \frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \frac{x}{y^2}dy = 0$ を解く

① $u_x = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ となるuを求める: $u = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + w(y) = \log x - \frac{x}{y} + w(y)$

② $u_y = \frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める: $\frac{x}{y^2} + \frac{dw}{dy} = \frac{x}{y^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy} = 0$ ∴ $w(y) = 0$

以上より $u = \log x - \frac{x}{y}$ ∴ $\log x - \frac{x}{y} = c$

(4) $P = x^{m+2}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3}$, $Q = x^{m+3}y^n + x^{m+1}y^{n+2}$ とおく

$P_y = (n+1)x^{m+2}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$, $Q_x = (m+3)x^{m+2}y^n + (m+1)x^m y^{n+2}$

$P_y = Q_x$ となると $\begin{cases} n+1=m+3 \\ 2(n+3)=m+1 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m-n=-2 \\ m-2n=5 \end{cases}$ ∴ $m=-9, n=-7$ ∴ $\mu = \frac{1}{x^9 y^7}$

よって $\left(\frac{1}{x^7y^6} + \frac{2}{x^9y^4}\right)dx + \left(\frac{1}{x^6y^7} + \frac{1}{x^8y^5}\right)dy = 0$ を解く

① $u_x = x^{-7}y^{-6} + 2x^{-9}y^{-4}$ となるuを求める:

$u = \int(x^{-7}y^{-6} + 2x^{-9}y^{-4})dx + w(y) = -\frac{1}{6}x^{-6}y^{-6} - \frac{1}{4}x^{-8}y^{-4} + w(y)$

② $u_y = x^{-6}y^{-7} + x^{-8}y^{-5}$ となるようにw(y)を求める:

$x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}+\frac{dw}{dy}=x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{1}{6x^6y^6}-\frac{1}{4x^8y^4}$ ∴ $\frac{2}{x^6y^6}+\frac{3}{x^8y^4}=c$

∴ $2x^2+3y^2=cx^8y^6$

(5) $P=x^my^{n+4}+2x^{m+4}y^{n+1}$, $Q=x^{m+5}y^n-2x^{m+1}y^{n+3}$ とおく

$P_y=(n+4)x^my^{n+3}+2(n+1)x^{m+4}y^n$, $Q_x=(m+5)x^{m+4}y^n-2(m+1)x^my^{n+3}$

∴ $\begin{cases} n+4=-2(m+1) \\ 2(n+1)=m+5 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} 2m+n=-6 \\ m-2n=-3 \end{cases}$ ∴ $m=-3,\ n=0$ ∴ $\mu=\frac{1}{x^3}$

よって $\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+\left(x^2-\frac{2y^3}{x^2}\right)dy=0$ を解く

① $u_x=\frac{y^4}{x^3}+2xy$ となる $u$ を求める:

$u=\int\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+w(y)=-\frac{1}{2}x^{-2}y^4+x^2y+w(y)$

② $u_y=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ となるように $w(y)$ を求める.

$-2x^{-2}y^3+x^2+\frac{dw}{dy}=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{y^4}{2x^2}+x^2y$ ∴ $x^2y-\frac{y^4}{2x^2}=c$ ∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=2c$

∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=c$

$\boxed{4}$ (1) $\frac{\partial}{\partial y}\left\{P\cdot e^{-\int p(x)dx}\right\}=P_y\cdot e^{-\int p(x)dx}$

一方, $\frac{\partial}{\partial x}\left\{Q\cdot e^{-\int p(x)dx}\right\}=Q_x e^{-\int p(x)dx}+Q\left(-p(x)e^{-\int p(x)dx}\right)$

$$= e^{-\int \varphi(x)dx}\{Q_x - \varphi(x)Q\} \underset{\varphi = \frac{Q_x - P_y}{Q}}{=} e^{-\int \varphi(x)dx}\{Q_x - Q_x + P_y\} = P_y \cdot e^{-\int \varphi(x)dx}$$

ゆえに. 積分因子である.

(2) $$\frac{\partial}{\partial y}\left\{P \cdot e^{\int \psi(y)dy}\right\} = P_y \cdot e^{\int \psi(y)dy} + P\left(\psi(y)e^{\int \psi(y)dy}\right)$$

$$= e^{\int \psi(y)dy}\left(P_y + \psi(y)P\right) \underset{\psi = \frac{Q_x - P_y}{P}}{=} e^{\int \psi(y)dy}\left(\cancel{P_y} + Q_x - \cancel{P_y}\right) = Q_x e^{\int \psi(y)dy}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q e^{\int \psi(y)dy}\right\}$$ よって 積分因子

(3) まず $$\frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} \cdot 2y$$

$$= -y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

同様に, $$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} \cdot 2x$$

$$= -x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P \cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = P_y e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + P\left(-y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(P_y - yP \cdot \theta(u)\right) \quad \cdots (ア)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q \cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = Q_x e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + Q\left(-x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(Q_x - xQ \cdot \theta(u)\right) \quad \cdots (イ)$$

ここで $\theta(u) = \dfrac{Q_x - P_y}{xQ - yP}$ なので $xQ \cdot \theta(u) - yP \cdot \theta(u) = Q_x - P_y$

$\therefore P_y - y \cdot P \cdot \theta(u) = Q_x - x \cdot Q \cdot \theta(u)$ よって (ア), (イ) より.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\, e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$ ∴ 積分因子

(4) $\frac{\partial}{\partial y} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

$\frac{\partial}{\partial x} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

よって

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = P_y e^{\int \xi(v)dv} + xQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$

$= e^{\int \xi(v)dv}\left(P_y + xQ\cdot\xi(v)\right) \quad \cdots (*)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = Q_x e^{\int \xi(v)dv} + yQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$

$= e^{\int \xi(v)dv}\left(Q_x + yQ\,\xi(v)\right) \quad \cdots (**)$

ここで $\frac{Q_x - P_y}{xQ - yP} = \xi(v)$ なので $xQ\xi(v) - yP\cdot\xi(v) = Q_x - P_y$

∴ $P_y + xQ\cdot\xi(v) = Q_x + yP\cdot\xi(v)$ ゆえに (*), (**) より

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right)$ ゆえに 積分因子

演習について:

(1) $P = \sin y,\ Q = \cos y$ とおく $P_y = \cos y,\ Q_x = 0$. よって $(Q_x - P_y)/P = -\frac{\cos y}{\sin y} = \psi$

$\int \psi\, dy = -\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = -\log \sin y$ ∴ $\mu = e^{-\log \sin y} = \frac{1}{\sin y}$

(2) $P = 2x + x^2 y,\ Q = x^3$ とおく $P_y = x^2,\ Q_x = 3x^2$. よって $(Q_x - P_y)/Q = (3x^2 - x^2)/x^3$
$= \frac{2}{x} = \varphi$.

$\int \varphi dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\log x = \log x^2 \quad \therefore \mu = e^{-\log x^2} = \frac{1}{x^2}$

(3) $P = y + \cos x$, $Q = x + xy + \sin x$ とおく $P_y = 1$, $Q_x = 1 + y + \cos x$

$\therefore (Q_x - P_y)/P = (1 + y + \cos x - 1)/(y + \cos x) = 1 = \psi \quad \therefore \int \psi dy = \int dy = y$

$\therefore \mu = e^y$

(4) $P = y$, $Q = x^2 + y^2 - x$ とおく. $P_y = 1$, $Q_x = 2x - 1 \quad \therefore (Q_x - P_y)/(xQ - yP)$

$= \frac{2x-1-1}{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(x-1)}{x(x^2+y^2) - (x^2+y^2)} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+y^2)} = \frac{2}{x^2+y^2}$

$\theta(u) = \frac{2}{u} \ (u = x^2 + y^2)$ とおくと $\int \theta du = 2\log u$

$\therefore \mu = e^{-\frac{1}{2}(2\log u)} = e^{-\log u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2+y^2}$

(5) $P = xy^3$, $Q = x^2y^2 - 1$ とおく $P_y = 3xy^2$, $Q_x = 2xy^2$

$\therefore Q_x - P_y = 2xy^2 - 3xy^2 = -xy^2$, $xP - yQ = x^2y^3 - x^2y^3 + y = y$

$\therefore \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \frac{-xy^2}{y} = -xy$ ここで $\xi(v) = -v \ (v = xy)$ とおくと

$\int \xi(v) dv = \int -v dv = -\frac{v^2}{2} \quad \therefore \mu = e^{-\frac{v^2}{2}} = e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$