Kyutech
Kyushu Institute of Technology

問題1.2.3

[1] (1) ① $y'+2xy=0$ を解く: $\frac{dy}{dx}=-2xy$ ∴ $\frac{dy}{y}=-2x\,dx$ ∴ $\log y=-x^2+c$

∴ $y=e^c\cdot e^{-x^2}$ ∴ $y=ce^{-x^2}$

② $y=ve^{-x^2}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{dv}{dx}e^{-x^2}-2xve^{-x^2}$. これらを与式に代入:

$e^{-x^2}\frac{dv}{dx}\cancel{-2xve^{-x^2}}\cancel{+2xve^{-x^2}}=x$ ∴ $\frac{dv}{dx}=xe^{x^2}$ ∴ $v=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

∴ $y=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+c\right)=ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$

(2) ① $xy'+y=0$ を解く: $x\frac{dy}{dx}=-y$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ ∴ $\log y=-\log x+c=\log\frac{e^c}{x}$

∴ $y=\frac{e^c}{x}$ ∴ $y=\frac{c}{x}$

② $y=\frac{v}{x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x-v}{x^2}$ これらを与式に代入:

$x\cdot\frac{xv'-v}{x^2}+\frac{v}{x}=\sin x$ ∴ $v'\cancel{-\frac{v}{x}}\cancel{+\frac{v}{x}}=\sin x$ ∴ $v=-\cos x+c$

∴ $y=\frac{c-\cos x}{x}$

(3) ① $xy'+4y=0$ を解く: $x\frac{dy}{dx}=-4y$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{4}{x}dx$ ∴ $\log y=-4\log x+c$

∴ $y=\frac{e^c}{x^4}$ ∴ $y=\frac{c}{x^4}$

② $y=\frac{v}{x^4}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x^4-4x^3v}{x^8}=\frac{v'}{x^4}-\frac{4v}{x^5}$.

これらを与式に代入: $x\left(\frac{v'}{x^4}\cancel{-\frac{4v}{x^5}}\right)\cancel{+\frac{4v}{x^4}}=\frac{1}{x^4}$ ∴ $\frac{v'}{x^3}=\frac{1}{x^4}$ ∴ $v'=\frac{1}{x}$

∴ $v=\log x+c$ ∴ $y=\frac{1}{x^4}(\log x+c)$

(4) ① $y'\cos x-y\sin x=0$ を解く: $\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x$ ∴ $\frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{\cos x}dx$

∴ $\log y=-\log\cos x+c$ ∴ $y=\frac{e^c}{\cos x}$ ∴ $y=\frac{c}{\cos x}$

② $y=\frac{v}{\cos x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}$

これらを与式に代入: $\cos x\cdot\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}-\sin x\cdot\frac{v}{\cos x}=\sin 2x$

$\therefore v' + \frac{\sin x}{\cos x} v - \frac{\sin x}{\cos x} v = \sin 2x \quad \therefore v = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

$\therefore y = \frac{1}{\cos x}\left(c - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

(5) ① $xy' - (x+1)y = 0$ を解く $x\frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \log y = x + \log x + c \quad \therefore y = e^c \cdot xe^x \quad \therefore y = c \cdot xe^x$

② $y = v \cdot xe^x$ が与式を満たすように v を定める: $y' = v' \cdot xe^x + v(e^x + xe^x)$.

これらを与式に代入: $x(xe^x v' + e^x \cdot v + xe^x v) - (x+1)xe^x v = x^2$

$\therefore x^2 e^x v' + \cancel{xe^x v} + \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{xe^x v} = x^2 \quad \therefore v' = e^{-x}$

$\therefore v = -e^{-x} + c \quad \therefore y = xe^x(-e^{-x} + c) = cxe^x - x \quad \therefore y = x(ce^x - 1)$

(6) ① $xy' - 2y = 0$ を解く: $x\frac{dy}{dx} = 2y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \quad \therefore \log y = 2\log x + c$

$\therefore y = e^c \cdot x^2 \quad \therefore y = cx^2$

② $y = v \cdot x^2$ が与式を満たすように v を定める: $y' = v' \cdot x^2 + 2vx$ これらを与式に代入:

$x(v'x^2 + \cancel{2vx}) - \cancel{2vx^2} = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore x^3 v' = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore v' = xe^{-x^2}$

$\therefore v = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \quad \therefore y = x^2\left(c - \frac{e^{-x^2}}{2}\right) \quad \therefore y = cx^2 - \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$

(7) ① $y' + y\tan x = 0$ を解く: $\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot dx$

$\therefore \log y = \log \cos x + c \quad \therefore y = e^c \cdot \cos x \quad \therefore y = c \cdot \cos x$

② $y = v \cdot \cos x$ が与式を満たすように v を定める: $y' = v'\cos x - v\sin x$ これらを与式に

代入: $v'\cos x - \cancel{v\sin x} + \cancel{v\cos x \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x \quad \therefore v' = 1 \quad \therefore v = x + c$

$\therefore y = (x + c)\cos x$

(8) ① $(x\log x)y'+y=0$ を解く: $(x\log x)\frac{dy}{dx}=-y$ $\therefore \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x\log x}$

$\therefore \frac{dy}{y}=-\frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx$ $\therefore \log y=-\log\log x+c=\log\frac{e^c}{\log x}$ $\therefore y=\frac{e^c}{\log x}$

$\therefore y=\frac{c}{\log x}$

② $y=\frac{v}{\log x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'\log x-v\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$=\frac{v'}{\log x}-\frac{v}{x(\log x)^2}$ これらを与式に代入

$\therefore (x\log x)\left(\frac{v'}{\log x}-\frac{v}{x(\log x)^2}\right)+\frac{v}{\log x}=\log x$

$\therefore x\cdot v'-\cancel{\frac{v}{\log x}}+\cancel{\frac{v}{\log x}}=\log x$ $\therefore v'=\frac{\log x}{x}$ $\therefore v=\frac{1}{2}(\log x)^2+c$

$\therefore y=\frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{2}(\log x)^2+c\right)$ $\therefore y=\frac{c}{\log x}+\frac{1}{2}\log x$

$\boxed{2}$ (1) ① $z=y^{-5}$ とおくと $z'=-5y^{-6}\cdot y'$ $\therefore y'=-\frac{1}{5}y^6\cdot z'$ これを与式に代入:

$-\frac{x}{5}y^6\cdot z'+y=x^3y^6$ $\therefore -\frac{x}{5}z'+y^{-5}=x^3$ $\therefore -\frac{x}{5}z'+z=x^3$

$\therefore z'-\frac{5}{x}z=-5x^2 \cdots (*)$

② $z'-\frac{5}{x}z=0$ を解く: $\frac{dz}{dx}=\frac{5z}{x}$ $\therefore \frac{dz}{z}=\frac{5}{x}dx$ $\therefore \log z=5\log x+c$

$\therefore z=e^c x^5$ $\therefore z=cx^5$

③ $z=v\cdot x^5$ が $(*)$ を満たすように v を定める: $z'=v'x^5+5vx^4$ これらを $(*)$ に代入:

$x^5v'+\cancel{5x^4v}-\cancel{\frac{5}{x}\cdot vx^5}=-5x^2$ $\therefore v'=-5x^{-3}$ $\therefore v=\frac{-5}{-2}x^{-2}+c$

$\therefore v=\frac{5}{2}x^{-2}+c$

以上より $z=x^5\left(\frac{5}{2}x^{-2}+c\right)=cx^5+\frac{5}{2}x^3$ $\therefore \frac{1}{y^5}=cx^5+\frac{5}{2}x^3$

(2) ① $z = y^{1-\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}$ とおくと $z' = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\cdot y'$ ∴ $y' = -2y^{\frac{3}{2}}z'$. これを与式に代入:

$-2y^{\frac{3}{2}}z' + 2y = 2xy^{\frac{3}{2}}$ ∴ $-2z' + 2y^{-\frac{1}{2}} = 2x$ ∴ $-2z' + 2z = 2x$

∴ $z' - z = -x$ …(*)

② $z' - z = 0$ を解く $\frac{dz}{dx} = z$ ∴ $\frac{dz}{z} = dx$ ∴ $\log z = x + c$ ∴ $z = e^c\cdot e^x$ ∴ $z = ce^x$

③ $z = v\cdot e^x$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^x + v\cdot e^x$ これを(*)に代入:

$v'e^x + \cancel{ve^x} - \cancel{ve^x} = -x$ ∴ $v' = -xe^{-x}$

∴ $v = -\int xe^{-x}dx + c = -\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) + c = xe^{-x} + e^{-x} + c$

以上より $z = e^x\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right) = ce^x + x + 1$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{y}} = ce^x + x + 1$

(3) ① $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ とおくと $z' = -\frac{1}{y^2}y'$ ∴ $y' = -y^2z'$ これを与式に代入:

$-y^2z' - xy = xe^{-x^2}\cdot y^2$ ∴ $z' + x\cdot y^{-1} = -xe^{-x^2}$ ∴ $z' + xz = -xe^{-x^2}$ …(*)

② $z' + xz = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -xz$ ∴ $\frac{dz}{z} = -x\,dx$ ∴ $\log z = -\frac{x^2}{2} + c$

∴ $z = e^c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∴ $z = ce^{-\frac{x^2}{2}}$

③ $z = v\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v$ これを(*)
に代入: $v'e^{-\frac{x^2}{2}} - \cancel{xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v} + \cancel{xv\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = -xe^{-x^2}$ ∴ $v' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$v = e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

以上より $z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$ ∴ $\frac{1}{y} = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$

(4) ① $z = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと $z' = -2y^{-3}\cdot y'$ $\therefore y' = -\frac{y^3}{2}z'$ これを与式に代入:

$x\left(-\frac{y^3}{2}z'\right) + y = y^3 \log x$ $\therefore -\frac{x}{2}z' + y^{-2} = \log x$ $\therefore -\frac{x}{2}z' + z = \log x$

$\therefore z' - \frac{2}{x}z = -\frac{2\log x}{x}$ …… (*)

② $z' - \frac{2}{x}z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z$ $\therefore \frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx$ $\therefore \log z = 2\log x + c = \log e^c \cdot x^2$

$\therefore z = e^c \cdot x^2$ $\therefore z = Cx^2$

③ $z = v x^2$ が (*) を満たすように v を定める: $z' = v'x^2 + 2xv$ これを (*) に代入:

$x^2 v' + \cancel{2xv} - \frac{2}{x}\cdot \cancel{v x^2} = -\frac{2\log x}{x}$ $\therefore v' = -\frac{2\log x}{x^3}$

$\therefore v = -\int \frac{2\log x}{x^3}dx = -2\int (\log x)\cdot x^{-3}dx + c$

$= -2\left\{(\log x)\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx\right\} + c$

$= \frac{\log x}{x^2} - \int x^{-3}dx + c = \frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2}x^{-2} + c$

以上より $z = x^2\left(\frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + c\right) = Cx^2 + \log x + \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{1}{y^2} = Cx^2 + \log x + \frac{1}{2}$

[3] (1) $z = \sin y$ とおくと $\frac{dz}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$ これらを与式に代入:

$\frac{dz}{dx} + xz = 2x$ … (*) ← 線形

① $\frac{dz}{dx} + xz = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -xz$ $\therefore \frac{dz}{z} = -x\,dx$ $\therefore \log z = -\frac{x^2}{2} + c$

$\therefore z = e^c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\therefore z = C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

② $z = v e^{-\frac{x^2}{2}}$ が (*) を満たすように v を定める: $\frac{dz}{dx} = v' e^{-\frac{x^2}{2}} + v\left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

これらを(*)に代入: $e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v' - \cancel{x e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot v} + \cancel{x v e^{-\frac{x^2}{2}}} = 2x$ ∴ $v' = 2x e^{\frac{x^2}{2}}$

∴ $v = 2e^{\frac{x^2}{2}} + c$

以上より. $z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c + 2e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ ∴ $z = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$ ∴ $\sin y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$

(2) $z = y^2$ とおくと $z' = 2y\cdot y'$. これらを与式に代入:

$z' - \frac{1}{x^2} z = e^{\frac{x^2-1}{x}}$ …(*) ← 線形

① $z' - \frac{1}{x^2} z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x^2}$ ∴ $\frac{dz}{z} = x^{-2}dx$ ∴ $\log z = -\frac{1}{x} + c$

∴ $z = e^c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ ∴ $z = ce^{-\frac{1}{x}}$

② $z = v\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-\frac{1}{x}} + v\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right)$

これらを(*)に代入: $v'e^{-\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} v} - \cancel{\frac{1}{x^2} v e^{-\frac{1}{x}}} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

∴ $v' = e^{\frac{1}{x}}\cdot e^{x-\frac{1}{x}} = e^x$ ∴ $v = e^x + c$

以上より. $z = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$ ∴ $y^2 = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$

(3) $y^2 = xz$ とおくと $2yy' = z + x\cdot z'$ これらを与式に代入:

$x(z + x\cdot z') + (x-1)xz = x^2e^x$ ∴ $\cancel{xz} + x^2 z' + x^2 z - \cancel{xz} = x^2 e^x$

∴ $x^2 z' + x^2 z = x^2 e^x$ ∴ $z' + z = e^x$ …(*) ← 線形

① $z' + z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -z$ ∴ $\frac{dz}{z} = -dx$ ∴ $\log z = -x + c$ ∴ $z = e^c\cdot e^{-x}$

∴ $z = ce^{-x}$

② $z = v\cdot e^{-x}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-x} - ve^{-x}$. これらを(*)に代入:

$v'e^{-x} - \cancel{ve^{-x}} + \cancel{ve^{-x}} = e^x$ ∴ $v' = e^{2x}$ ∴ $v = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

以上より $z=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)=ce^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$ $\therefore y^2=xz=cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

$\therefore y^2=cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

[4] 与式の任意の解を y_1 とし、$z=y-y_1$ とおく。与式に代入すると

$\frac{dz}{dx}+\frac{dy_1}{dx}+P(x)(z+y_1)=Q(x)$ $\therefore \frac{dz}{dx}+P(x)z+\left\{\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1-Q(x)\right\}=0$

$\therefore \frac{dz}{dx}+P(x)z=0$。この変数分離形の方程式を解くと $z=ce^{-\int P(x)dx}$

$\therefore y=ce^{-\int P(x)dx}+y_1$

また、上の公式より $y=ce^{-\int\frac{dx}{x}}+x^2=ce^{-\log x}+x^2=\frac{c}{x}+x^2$ $\therefore y=\frac{c}{x}+x^2$

[5] 初期条件を満たす解は、解の公式より、$y(x)=e^{-x}\int_0^x e^{t}r(t)dt$ となる。仮定より

すべての $t\geq 0$ に対して $|r(t)|\leq M$ なので、すべての $x\geq 0$ に対して

$$|y(x)|\leq e^{-x}\int_0^x e^{t}|r(t)|dt\leq e^{-x}\int_0^x Me^{t}dt=Me^{-x}\left[e^{t}\right]_0^x$$

$$=Me^{-x}(e^{x}-1)\leq Me^{-x}\cdot e^{x}=M.$$