問題 1.2.2

□ (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v=\frac{y}{x}$ とおく. $y=xv$ $\therefore \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$.

これを代入すると: $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{1+v^2}$ $\therefore x\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{1+v^2}-v=\frac{2v-v-v^3}{1+v^2}$

$=\frac{v-v^3}{1+v^2}$ $\therefore \frac{1+v^2}{v(1-v^2)}dv=\frac{dx}{x}$ $\therefore \int\left(\frac{1}{v}+\frac{2v}{1-v^2}\right)dv=\log x+c$.

$\therefore \log v-\log(1-v^2)=\log x+c$ $\therefore \log\frac{v}{1-v^2}=\log e^c\cdot x$ $\therefore \frac{v}{1-v^2}=e^c\cdot x$.

$\therefore \frac{v}{1-v^2}=cx$ $\therefore \frac{y/x}{x^2-y^2/x^2}=cx$ $\therefore x^2-y^2=\frac{1}{c}y$ $\therefore$ **$y=x^2-y^2$**

(2) $x\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\frac{y}{x}}$. $v=\frac{y}{x}$ とおく. $y=xv$ $\therefore \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

これを代入すると: $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{v}=v-\frac{1}{v}$ $\therefore x\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{v}$ $\therefore vdv=-\frac{dx}{x}$

$\therefore \frac{1}{2}v^2=-\log x+c$ $\therefore v^2=-2\log x+2c$ $\therefore \frac{y^2}{x^2}=-2\log x+2c$ $\therefore \frac{y^2}{x^2}=-2\log x+c$

$\therefore$ **$y^2=x^2(-2\log x+c)$**

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}=\frac{1+y/x}{y/x-1}$. $v=\frac{y}{x}$ とおく $y=xv$ $\therefore \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. これを代入すると

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{v-1}$ $\therefore x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{v-1}-v=\frac{1+v-v^2+v}{v-1}=\frac{1+2v-v^2}{v-1}$

$\therefore \frac{v-1}{v^2-2v-1}dv=-\frac{dx}{x}$ $\therefore \frac{1}{2}\log(v^2-2v-1)=-\log x+c$ $\therefore \log(v^2-2v-1)=\log\frac{e^{2c}}{x^2}$

$\therefore v^2-2v-1=\frac{e^{2c}}{x^2}$ $\therefore y^2-2xy-x^2=e^{2c}$ $\therefore$ **$c=y^2-2xy-x^2$**

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$. $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. $\frac{y}{x}=v$ とおく. これを代入すると:

$v+x\frac{dv}{dx}=v+\tan v$ $\therefore \frac{\cos v}{\sin v}dv=\frac{dx}{x}$ $\therefore \log\sin v=\log x+c=\log e^c\cdot x$

$\therefore \sin v=e^c\cdot x$ $\therefore$ **$cx=\sin\frac{y}{x}$**

(5) $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}+1$. $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ $\frac{y}{x}=v$ とおく . これを代入すると:

$v+x\frac{dv}{dx}=v^2+v+1 \quad \therefore \frac{dv}{v^2+1}=\frac{dx}{x} \quad \therefore \tan^{-1}v=\log x+c \quad \therefore v=\tan(\log x+c)$

$\therefore \underline{y=x\tan(\log x+c)}$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v=\frac{y}{x}$ とおくと $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. これを与式に代入:

$v+x\frac{dv}{dx}=v+\sqrt{1+v^2} \quad \therefore \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{dx}{x} \quad \therefore \log\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)=\log x+c$

$\therefore v+\sqrt{v^2+1}=e^c\cdot x \quad \therefore \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=cx \quad \therefore \underline{y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2}$

2 (1) 2直線 $x-y-1=0$, $x-2y-1=0$ の交点は $(x,y)=(1,0)$. よって $p=x-1$, $q=y$ とおく. このとき $\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}$ であり, 与式は $\frac{dq}{dp}=\frac{p-q}{p-2q}=\frac{1-q/p}{1-2q/p}$. $v=\frac{q}{p}$ とおくと $\frac{dq}{dp}=v+p\frac{dv}{dp}$. これを代入すると $v+p\frac{dv}{dp}=\frac{1-v}{1-2v} \quad \therefore \frac{2v-1}{2v^2-2v+1}dv=-\frac{dp}{p}$

$\therefore \frac{1}{2}\log(2v^2-2v+1)=-\log p+c \quad \therefore \log(2v^2-2v+1)=\log\frac{e^{2c}}{p^2}$

$\therefore 2v^2-2v+1=\frac{c}{p^2} \quad \therefore p^2-2pq+2q^2=c \quad \therefore \underline{(x-1)^2-2(x-1)y+2y^2=c}$

(2) 2直線 $6x-2y-3=0$, $2x+2y-1=0$ の交点は $(x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)$. よって

$p=x-\frac{1}{2}$, $q=y$ とおく. このとき $\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}$ であり. 与式は $\frac{dq}{dp}=\frac{6p-2q}{2p+2q}=\frac{3p-q}{p+q}$

$=\frac{3-q/p}{1+q/p}$. $v=\frac{q}{p}$ とおくと. $\frac{dq}{dp}=v+p\frac{dv}{dp}$. これを代入:

$v+p\frac{dv}{dp}=\frac{3-v}{1+v} \quad \therefore \frac{v+1}{v^2+2v-3}dv=-\frac{dp}{p} \quad \therefore \frac{1}{2}\log(v^2+2v-3)=-\log p+c$

$\therefore \log(v^2+2v-3)=\log\frac{e^{2c}}{p^2} \quad \therefore v^2+2v-3=\frac{c}{p^2} \quad \therefore q^2+2pq-3p^2=c$

$\therefore \underline{y^2+2y\left(x-\frac{1}{2}\right)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=c}$

3 $x^2+y^2=cx$ $\therefore 2x+2yy'=c$ $\therefore x^2+y^2=x(2x+2yy')$

$\therefore x^2+y^2=2x^2+2xyy'$ $\therefore 2xyy'=y^2-x^2$. ゆえに. 直交曲線の方程式は

$2xy\left(-\dfrac{1}{y'}\right)=y^2-x^2$ $\therefore \dfrac{y'}{2xy}=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ $\therefore y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}=\dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$v=\dfrac{y}{x}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$. これらを与式に代入. $v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{2v}{1-v^2}$

$\therefore x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^3+v}{1-v^2}$ $\therefore \dfrac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv=-\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \displaystyle\int\left(\frac{2v}{v^2+1}-\frac{1}{v}\right)dv=-\log x+c$

$\therefore \log(v^2+1)-\log v=-\log x+c$ $\therefore x\left(\dfrac{v^2+1}{v}\right)=e^c$ $\therefore x^2+y^2=e^c\cdot y$

$\therefore x^2+y^2=cy$. 初期条件 $x=1, y=1$ より. $1^2+1^2=c\cdot 1$ $\therefore c=2$ $\therefore x^2+y^2=2y$