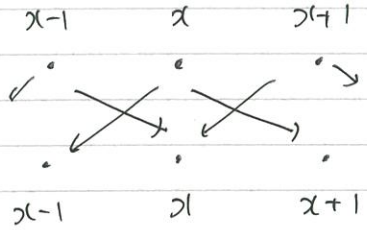
1次元2状態量子ウォーク.

$x \in \mathbb{Z}$ に対し. $H_x = \mathbb{C}^2$ とし. $H = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} H_x = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}^2$ とする.

また. P_x を H_x への proj. とする.

今だと. 1-dim. QW の def. は シフト $S = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L^* \end{bmatrix}$ とコイン

$C = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} C_x$, $C_x = \begin{bmatrix} p_x & q_x \\ q_x & -p_x \end{bmatrix}$ を使って. $U = SC$ とおがこれでよいか?



と左と右に移動するのが 1-dim. QW と考える.

Def 1.1 (仮.) $U \in B(H)$ をユニタリとする.

U が 1-dim. QW

$\Leftrightarrow U H_x \subset H_{x-1} \oplus H_{x+1}$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow U P_x = (P_{x-1} + P_{x+1}) U P_x$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$

注. ・$\xi, \eta, \varphi, \psi \in \mathbb{C}^2$ はベクトルを表し. 位置を ξ_x で表す.

・$\xi \perp \eta \Rightarrow U\xi \perp U\eta$, とくに. $H_x \perp H_{x+2}$ より $UH_x \perp UH_{x+2}$.

・実際はないが. 例えば.

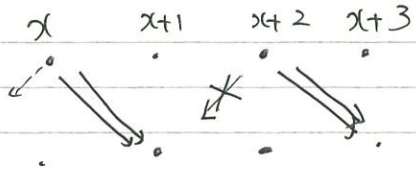
$$U\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x+1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{x-1}\right) \quad U\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{x+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{x-1}\right)$$

もあるかもしれない. (3状態だとありえる)

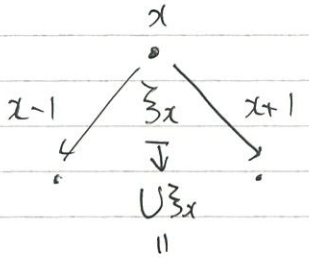
univ. CO-OP

$P_{x+1}UH_x = H_{x+1}$

Prop1.2 $\dim P_{x+1}UH_x = 2$ or $\operatorname{rank} P_{x+1}UP_x = 2$ なら $UH_{x+2} = H_{x+3}$.



☺ $\forall \xi_x \in H_x$ と $\forall \zeta_{x+2} \in H_{x+2}$ に対し.



とかけるので.

$P_{x-1}U\xi_x + P_{x+1}U\xi_{x+1}$

$0 = \langle \xi_x, \zeta_{x+2} \rangle = \langle U\xi_x, U\zeta_{x+2} \rangle$

$= \langle P_{x-1}U\xi_x + P_{x+1}U\xi_x, P_{x+1}U\zeta_{x+2} + P_{x+3}U\zeta_{x+2} \rangle$

$= \langle P_{x+1}U\xi_x, PU\zeta_{x+2} \rangle$ となる.

$P_{x+1}UH_x = H_{x+1}$ より. $P_{x+1}U\zeta_{x+2} = 0$ $(\forall \zeta_{x+2} \in H_{x+2})$.

$\therefore UH_{x+2} \subset H_{x+3}$ $\therefore UH_{x+2} = H_{x+3}$. //

注. この条件下でさらに. $UH_x = H_{x+1}$ となり. ウォークは単に右へ行くものになる

よって. この条件を 除外する.

Def1.1.(改)

Uが 1-dim. QW

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{Z}$ に対し. $\dim P_{x+1}UH_x = \dim P_{x-1}UH_x = 1$.

Thm.1.3. 1-dim. QW U に対し、H_x の ONB $\{\xi_x, \zeta_x\}, \{\varphi_x, \psi_x\}$ が存在して、

$$U = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |\xi_{x+1}\rangle\langle\psi_x| + |\zeta_{n-1}\rangle\langle\varphi_x| \quad \text{とかける.} \quad -\text{※}$$

注. ・$|\xi\rangle\langle\zeta|\psi = \langle\zeta,\psi\rangle\cdot\xi$. で ζ を ξ に写す rank-1-op.

・$W|\xi\rangle\langle\zeta|W^* = |W\xi\rangle\langle W\zeta|$, $|\xi\rangle\langle\zeta|\cdot|\psi\rangle\langle\varphi| = \langle\zeta,\psi\rangle\cdot|\xi\rangle\langle\varphi|$

・U はユニタリより ONB の行き先で決まる.

☺ $P_{x+1}UH_x \ni \xi_{x+1}$, $P_{x-1}UH_x \ni \zeta_{x-1}$ $\|\xi_{x+1}\| = \|\zeta_{x-1}\| = 1$ をとる.

$UH_x = P_{x+1}UH_x \oplus P_{x-1}UH_x = \mathrm{span}\{\xi_{x+1}, \zeta_{x-1}\}$ より.

$\exists \psi_x, \varphi_x \in H_x$ s.t. $U\psi_x = \xi_{x+1}$, $U\varphi_x = \zeta_{n-1}$ とできる.

$\{\xi_{x+1}, \zeta_{x-1}\}$ が ONS より $\{\psi_x, \varphi_x\}$ は H_x の ONB.

$\therefore$ $\xi_x = U\psi_{x-1}$, $\zeta_x = U\varphi_{x+1}$ も H_x の ONB.

以上より. $U = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |\xi_{x+1}\rangle\langle\psi_x| + |\zeta_{x-1}\rangle\langle\varphi_x|$. //

次にユニタリ同値を考える. $\{e_x^{(1)}, e_x^{(2)}\}$ を $H_x = \mathbb{C}^2$ の canonical basis とする.

Prop.1.4. 1-dim. QW は $\{\psi_x, \varphi_x\}$ を H_x の ONB として.

$$\tilde{U} = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |e_{x-1}^{(1)}\rangle\langle\varphi_x| + |e_{x+1}^{(2)}\rangle\langle\psi_x| \quad \text{とユニタリ同値.}$$

☺ U は※で def. されたものとし. $W = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} \left(|e_x^{(1)}\rangle\langle\zeta_x| + |e_x^{(2)}\rangle\langle\xi_x|\right)$ とすると

$$WUW^* = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |W\xi_{x+1}\rangle\langle W\psi_x| + |W\zeta_{x-1}\rangle\langle W\varphi_x|$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}} |e_{x+1}^{(2)}\rangle\langle W\psi_x| + |e_{x-1}^{(1)}\rangle\langle W\varphi_x| \quad \text{とできる //}$$

Thm 1.5 1-dim. QW は coined walk とユニタリ同値.

☺ $\ell^2(\mathbb{Z}) = \overline{\mathrm{span}}\{|x\rangle \mid x\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{C}^2 = \mathrm{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$ とし.

$$W : \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} H_x \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}^2$$

で ユニタリを def. する.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ e_x^{(i)} & \longmapsto & |x\rangle \otimes e^{(i)} \end{array} \qquad (i=1,2)$$

また. $W\varphi_x = |x\rangle\otimes\xi_x$, $W\psi_x = |x\rangle\otimes\zeta_x$ とかくことにする. このとき.
$\{\xi_x, \zeta_x\}$ は $\mathbb{C}^2$ の ONB で

$$WUW^* = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |We_{x-1}^{(1)}\rangle\langle W\varphi_x| + |We_{x+1}^{(2)}\rangle\langle W\psi_x|$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}} |x-1\rangle\otimes e^{(1)}\rangle\langle |x\rangle\otimes\xi_x| + |x+1\rangle\otimes e^{(2)}\rangle\langle |x\rangle\otimes\zeta_x|$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{Z}} |x-1\rangle\langle x|\otimes|e^{(1)}\rangle\langle\xi_x| + |x+1\rangle\langle x|\otimes|e^{(2)}\rangle\langle\zeta_x|$$

$$= \left(\sum_{y\in\mathbb{Z}} |y-1\rangle\langle y|\otimes|e^{(1)}\rangle\langle e^{(1)}| + |y+1\rangle\langle y|\otimes|e^{(2)}\rangle\langle e^{(2)}|\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x|\otimes\underbrace{\left(|e^{(1)}\rangle\langle\xi_x| + |e^{(2)}\rangle\langle\zeta_x|\right)}_{\text{ここがユニタリなので } C_x \text{ でおく.}}\right)$$

$$= S\cdot\bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x|\otimes C_x. \qquad //.$$

ユニタリ同値類.

注. 2×2 ユニタリ又は $\mathbb{C}^2$ の ONB は. 実4パラメータ. $\alpha,\beta,\gamma,p\in\mathbb{R}$ とすると.

$$C_x = \begin{bmatrix} e^{\alpha i}\sqrt{p} & e^{\beta i}\sqrt{1-p} \\ e^{\gamma i}\sqrt{1-p} & -e^{(\gamma-\alpha+\beta)i}\sqrt{p} \end{bmatrix}$$

と表せる.

Lem 1.6. $W = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} e^{i\eta_x} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_x} \end{bmatrix}$ のとき.

$W' = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \begin{bmatrix} e^{i\eta_{x-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{x+1}} \end{bmatrix}$ とすると. $WS = SW'$

☺ 省略.

Thm 1.7. 1-dim. QW は $U = S \cdot \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{p_x} & e^{i\nu_x}\sqrt{1-p_x} \\ e^{i\nu_x}\sqrt{1-p_x} & -\sqrt{p_x} \end{bmatrix}$ $(\nu_0 = 0)$

を代表元とするユニタリ同値類で分類できる.

☺ W を Lem 1.6 のようにとり. coined walk U を

$$U = S \cdot \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} e^{\alpha_x i}\sqrt{p_x} & e^{\beta_x i}\sqrt{1-p_x} \\ e^{\gamma_x i}\sqrt{1-p_x} & -e^{(\gamma_x-\alpha_x+\beta_x)i}\sqrt{p_x} \end{bmatrix}$$ とすると.

$$WSCW^* = SW'CW^*$$

$$= S \cdot \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} e^{(\alpha_x+\eta_{x-1}-\eta_x)i}\sqrt{p_x} & e^{(\beta_x+\eta_{x-1}-\theta_x)i}\sqrt{1-p_x} \\ e^{(\gamma_x+\theta_{x+1}-\eta_x)i}\sqrt{1-p_x} & -e^{(\gamma_x-\alpha_x+\beta_x+\theta_{x+1}-\theta_x)i}\sqrt{p} \end{bmatrix}$$

となる. η_x と θ_x を.

- $\alpha_x + \eta_{x-1} - \eta_x = 0$
- $-\alpha_x + \beta_x + \gamma_x + \theta_{x+1} - \theta_x = 0$
- $\beta_0 + \eta_{-1} - \theta_0 = 0$

となるようにとればよい.

実際 $\theta_0 = 0$, $\eta_{-1} = \theta_0 - \beta_0$ とし.

他の η_x, θ_x は. $\alpha_x + \eta_{x-1} - \eta_x = 0$ と $-\alpha_x + \beta_x + \gamma_x + \theta_{x+1} - \theta_x = 0$

から帰納的に定義する.

このとき. $\beta_x + \eta_{x-1} - \theta_x = -(\gamma_x + \theta_{x+1} - \eta_x) = \nu_x$ とすれば.

$$WSCW^* = S \cdot \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} \sqrt{p_x} & e^{\nu_x i}\sqrt{1-p_x} \\ e^{-\nu_x i}\sqrt{1-p_x} & -\sqrt{p_x} \end{bmatrix}$$ となる.

逆に. U_1 を (p_x, ν_x), U_2 を (q_x, θ_x) に対応する QW とする.

$W = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} W_x$ に対し. $U_1 = WU_2W^*$ のとき.

$P_{x-1} U_1 H_x = P_{x-1} U_2 H_x = \mathbb{C}(|x-1\rangle \otimes e^{(1)})$ などから.

$W_x = \begin{bmatrix} e^{i\alpha_x} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_x} \end{bmatrix}$ の形しかないとわかる.

同じ計算を行うと. $U_1 = U_2$ が示せる.

1-dim. 3状態QW

$H_x = \mathbb{C}^3$, $H = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} H_x$ とする.

2状態と同じように.

$UH_x \subset H_{x-1} \oplus H_x \oplus H_{x+1}$ とすると. 例えば.

$$U\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}_{x+1}\right)$$

$$U\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_x + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_{x+1}\right)$$ と def. することも可能.

Def. 1.8.

U が 1-dim. 3-state QW

$\Leftrightarrow \dim P_{x+1}UH_x = \dim P_x UH_x = \dim P_{x-1}UH_x = 1$ とする.

このとき. U は次の形とユニタリ同値.

$$U = \sum_{x\in\mathbb{Z}} |e^{(1)}_{x-1}\rangle\langle \xi_x| + |e^{(2)}_x\rangle\langle \eta_x| + |e^{(3)}_{x+1}\rangle\langle \gamma_x|.$$

→ coined walk の形でかける.

一方 パラメータを考えると. 3×3 ユニタリは 実9パラメータ.

ユニタリ同値を考えると. $W = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} |x\rangle\langle x| \otimes \begin{bmatrix} e^{i\theta_x} & & \\ & e^{i\mu_x} & \\ & & e^{i\nu_x} \end{bmatrix}$ を使えば.

実6パラメータまで下げることができる.

univ. CO-OP

1-dim. 2-state QW で. translation-inv. (位置に依存しない) の場合

→ 1パラメータで記述可能.

2-dim. 2-state QW で trans.-inv. の場合

→ 2パラメータで記述可能

split-step QW で trans.-inv. の場合

→ 4パラメータで記述可能.

xごとに