

結び目で世界はどこまで描けるのか—幾何と物理の交差点—



伊藤 昇

東京大学大学院数理科学研究
科

noboru@ms.u-tokyo.ac.jp

3次元空間において1本の閉じた紐を**結び目**と呼び、その一般化、互いに交わらない有限個の結び目の和集合を**絡み目**と呼ぶ。

かつて19世紀にはガウスが絡み目の絡まり具合を記述する（後にマクスウェルにより再発見された）公式を電磁気学から導き出し、また平面曲線を文字列で考察していた。それは「ガウスによるガウスのための結び目研究」であつたろう。その後、ケルヴィン卿が渦原子論、いうなれば「世界は結び目でできている」と提唱し、テイト、マクスウェル等も参画したとされる結び目研究は「物理学者による物理のための結び目研究」だったと考えられる。

テイトは「結び目の表」を作成した。テイトの時代には、「与えられた結び目がほどこるかほどこけないか」、「2つの結び目が移り合うか否か」を判定することに役立つ写像（結び目不変量と呼ばれる）はなかったはずなので、リストアップは困難を極めたことであろう。結び目を何らかの方法ですべてリストアップすることは現代数学においても重要課題の一つである。それを完遂するため「2つの結び目が移り合うか否か」を完全判定する結び目不変量の発見も重要課題となっている。テイトはこの数学の根本問題に関して、予想を提唱している。ジョーンズ多項式（1984年）が現れるころまで長い間解決せず、テイト予想と呼ばれた。しかし、その後ケルヴィンの渦原子論の否定があつた。そのためだろうか、結び目の物理研究は依然続いたはずだが、ケルヴィンらの「物理のための結び目理論」はいつしかトポロジーの一分野「結び目理論」として「数学者による数学のための結び目研究」として引き継がれたようである。

1927年のライデマイスターの定理は1つの結び目が2つの平面投影図を持つとき、それらが移り合う必要十分条件を与え、1928年には結び目に関するアレクサンダー多項式という写像が発見された。テイト予想はライデマイスターの平面投影図による結び目の理解に深く関わるものであり、アレクサンダー多項式は結び目の構造を映し出すことは現在明らかになっている。

ジョーンズ多項式がウィッテンによってチャーン-サイモンズ理論のウィルソンループの期待値として解釈され、物理学の結び目理論は脚光を浴びた。数学においてもジョーンズ多項式はコンツェビッチ不変量の理論、リー環に対応するコード図を用いた積分理論が広く展開された。この時期の結び目理論研究は物理学による刺激により、爆発的なものとなった。その後、ガウスの平面曲線論のアイディアを広く一般化したトゥラエフによるナノワード理論によってコード図の概念は精密に研究され、ジョーンズ多項式は結び目の情報をすべて使っているわけでないことが証明された。

2000年代に入り、ホモロジー論を使ってジョーンズ多項式は新たな物理パラメータを獲得することになる。このパラメータを解釈しようとする物理研究が盛んに行われ、引き続いている。またDNAにおける生物研究、高分子化合物や材料といった化学研究、飛行機の揚力や量子渦糸の物理量を計算する物性物理、あるいは統計物理や場の理論の研究において結び目理論は陰日向に顔を出している。結び目の数学が分野問わず「世界を理解する一つの手段」として捉えられ、物理研究を積極的に発展させる時代に再びなったのかもしれない。

1. 結び目の平面投影図とテイト予想

結び目とは1本の閉じた紐のことであり、絡み目とは有限個の互いに交わらない結び目たちの和集合のことである。最近では、結び目を並べたリストを目にすることも多くなった(図1)。結び目は連続的に動かしたものを同一視し、幾

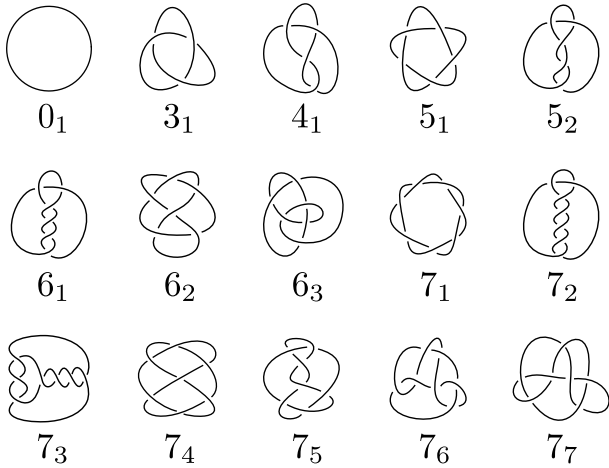


図1 ある結び目たちの表 (n_i の n は2重点の数、 i はロルフセン (Rolfsen) の著書¹⁾ における番号付け)

何学的な対象とするものである。これが、例えば物性物理では流体の渦糸、素粒子物理では、 D -ブレーンたちの交差、化学では分子の部分グラフ、生物では2重らせんのDNAとして現れ、世界を記述していくのである。数学の場合は定義(この「連続的に動かす」というところ)に曖昧さを残したくない学問なので、例えば同相(トポロジカルに空間が同値であること)という概念を使って定義する¹⁾。

定義1 (結び目とその同値性). 滑らかな埋め込み $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^3$ の像を K と書き、**結び目**と呼ぶ。このとき、この f を f_K と書く。 K と K' を2つの結び目とする。このとき、 K と K' が同値であるとは、滑らかな連続写像 $F: \mathbf{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ が存在して各 $F(x, \cdot): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は同相写像(全単射連続で逆も連続な写像)で $F(K, 0) = K$ かつ $F(K, 1) = K'$ を満たすことをいう。

このように連続的に動かすことができ無限の形をとる結び目をどう捉えたら良いだろうか? 一つの方法として図1のように平面につぶれない形²⁾で投影して絵を描き上げる方法がある。これは直感的でわかりやすい。空間内の結び目を投影した曲線から、結び目を回復できるよう、各々の2重点をなすパスの上下を上パス (over-path)、下パス (under-path) として指定するのである。これを**結び目射影図**と呼ぶ。物理学者による**テイト予想**³⁾ (予想1) は射影図

¹⁾ 定義1以降はこのような数学スタイルはなるべく横に置き、直感に重きをおく記述にしていくことにする。

²⁾ 射影の仕方を選べば3重点や接点が出なく、自己交差は横断的な2重点のみとするようにできる。

³⁾ 人名はなるべくカタカナ表記をするが、定まらない場合は英語表記とした。

を使って述べられた。用語説明は後にして内容を述べよう⁴⁾。

予想1 (テイト (Tait)²⁾). (第1予想) 交代結び目の既約交代図式の交点数はその結び目にとって最小である。

(第2予想) 交代結び目 K の既約交代図式 D, D' に対して捻り数は変わらない。すなわち、 $w(D) = w(D')$ 。

既約交代図式(定義2)、テイト数 $w(D)$ (定義3) は以下のようにして定義される。

定義2 (交代図式、交代結び目、既約交代図式). K を結び目とする。 K の結び目射影図 D 上の1点 p_0 から出発して、 D をたどり p_0 に戻るとき、2重点に関し上パスを通過するのと下パスを通過するのが交互に現れるならば、 D を**交代図式**とよぶ。交代図式を1つでももつ結び目は**交代結び目**と呼ぶ。結び目射影図 D に対して、ある単純閉曲線 C が存在して交点1点 $D \cap C$ のみで横断的に交差する(図2)ならば、 D は可約であるとよぶ。可約でない図式は**既約図式**とよぶ。既約な交代図式を**既約交代図式**とよぶ。

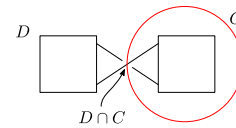


図2: 可約な図式 D と単純閉曲線 C

定義3 (交点、交点の符号、捻り数(テイト数)). 結び目射影図の2重点を**交点**とよぶ。交点のうち、上パスが進む方向に右ねじを重ねておいたとき、ネジが締まる方向に下パスが進むならば**正**交点、ネジが緩む方向に下パスが通るならば**負**交点とよぶ(図3)。結び目射影図 D のすべての交点 p に渡った、この符号和 $\sum_p \varepsilon(p)$ を $w(D)$ と書いて**捻り数(テイト数)**とよぶ。

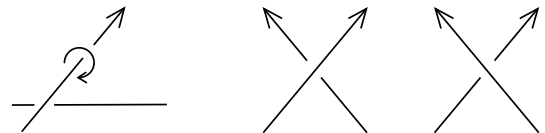


図3: 右ねじと上パス(左)、正交点(中)と負交点(右)

テイトの第1予想、第2予想は予想から100年経って村杉邦男³⁾ (1987年)により、ジョーンズ多項式⁵⁾ (第3章)を用いて解決された。実はテイトの第2予想のオリジナルヴァージョンは、交代結び目に限っておらず「結び目 K の最小交点数をもつ結び目射影図 D, D' に対して、捻り数は変わらない」というものであった。それを理由にこれまた100年ほどの間、捻り数が違う図4の2つの結び目は異なる、と信じられてきたのである(パーコ⁴⁾が重複を発見し



図4 左は捻り数が8、右は10となる同値な結び目の2つの結び目射影図

た)。このように、結び目を扱うときは、見えている直観を大事にして考えることと、直観を疑って論理で詰めていくことの両方が試される。タイトの既約交代図式を簡単なものから並べるというリストアップは理にかなっていたが、非交代図式においては、時に人間の直観を裏切るようなこともおきたというわけである。読者は図4の2つの結び目が等しいということを模型をつくって「簡単に」示すことができるだろうか？

2. ガウス積分における物理的計算と結び目の数学

では、結び目や絡み目を判別するにはどうしたらよいだろうか？電磁気学におけるガウスの方法に倣い、考えてみよう。まず閉曲線 C_1, C_2 により非自明な中でもっとも単純なホップリンクという2成分絡み目を思い浮かべる。そのとき C_2 に大きさ I の電流を流すとビオ・サバールの法則は、 μ_0 を真空の透磁率、 $B(x)$ を磁場（磁束密度）として

$$B(x) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \frac{f'(s) \times (x - f(s))}{|x - f(s)|^3} ds \quad (1)$$

となることが知られている。この C_2 に電流が流れているとしてできる磁場による $(I\mu_0)^{-1}B(x)$ を C_1 上積分すると

$$\frac{1}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\det(g(t) - f(s), f'(s), g'(t))}{|f(s) - g(t)|^3} ds dt \quad (2)$$

となる。これらはビオ・サバールの法則からアンペールの法則を導くときの基本的な考察により導かれるので読者の皆さまにとっては馴染み深いことだと思う。数学でも**ガウス積分**と呼ばれる。ところで(1)、(2)を物理の設定を変えて眺めてみることもできる。 C_2 が飛行機の翼端や竜巻にみられるような高レイノルズ数の流れが発生しているときは、結び目の一部のように細長い領域（渦糸）に渦度が集中すると見なされる。このとき(1)の C_2 を渦糸、 $\mu_0 I$ を渦糸 C_2 の強さ Γ （循環）に差し替えると(1)の左辺は速度場を表すものとみなされる。ここで渦糸の強さ Γ は揚力の構成要素の一つとなる量である。このとき、 C_1 も渦糸だとすると(2)からきまる積分値 α_{12} と渦糸 C_i の強さ $\Gamma_i (i=1, 2)$ からなる $\alpha_{12}\Gamma_1\Gamma_2$ は非粘性流の保存量（トポロジ的不変量）である**ヘリシティ**として知られ、渦線の絡み具合を表す（この量は n 成分に一般化される）。

⁴いわゆるタイトの最終予想はここでは省略する。

⁵ジョーンズはこの発見を含む業績により、フィールズ賞を受賞した。

数学ではこの積分値を**写像度**とみなす。ガウス写像

$$\phi: S^1 \times S^1 \ni (s, t) \mapsto \frac{f(s) - g(t)}{|f(s) - g(t)|} \in S^2$$

と S^2 の面積要素

$$\omega_{S^2} = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{|x|^3}$$

を用いた引き戻し $\phi^*(\omega_{S^2})$ は微分形式の基本的な計算により(2)の被積分関数となることがわかる（筆者は今井淳の文献⁵⁾を参照した）。単位球面の面積は 4π だからトーラス T^2 を用いて(2)は $\int_{T^2} \phi^*(\frac{\omega_{S^2}}{4\pi})$ とかける。これは単位球面をトーラスの ϕ による像が符号付きで何重に覆っているかをカウントしており（したがって積分値は整数である）、より正確には微分形式によるコホモロジー（**ド・ラムコホモロジー**）によって記述され、写像度と呼ばれる。これは C_1 や C_2 を互いが交わらないように動かしても変わらない。実際、 C_1 や C_2 をパラメーター $u \in [0, 1]$ で動かすとして、それぞれに対応する ϕ を ϕ_0 （始点での ϕ ）、 ϕ_1 （終点での ϕ ）とする。記号 $f_u(s)$ 、 $g_u(t)$ を考えると

$$\Phi: T^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2; \Phi(s, t, u) = \frac{f_u(s) - g_u(t)}{|f_u(s) - g_u(t)|} \in S^2$$

によってパラメーターで動かした写像度は(3)のようにストークスの定理（2つ目の等号）と $d\omega_{S^2} = 0$ により従う。

$$\begin{aligned} \int_{T^2} \phi_1^*(\omega_{S^2}) - \int_{T^2} \phi_0^*(\omega_{S^2}) &= \int_{\partial(T^2 \times [0, 1])} \Phi^*(\omega_{S^2}) \\ &= \int_{T^2 \times [0, 1]} d\Phi^*(\omega_{S^2}) = \int_{T^2 \times [0, 1]} \Phi^*(d\omega_{S^2}) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

電流、あるいは渦からなる保存量が積分と相互連絡するコホモロジーで記述されるとき、数学者は身を乗り出すものである（きっと物理学者もそうであろう）。ガウス積分は2つの S^1 である C_1, C_2 にそれぞれパラメーター s, t をおいてその $g(t) - f(s)$ の単位ベクトルをみていた。これを模式的に表しガウス積分を $\langle \bigcirc \rightarrow \bigcirc, \cdot \rangle$ と書いたりもする。このとき右側には C_1, C_2 からなる絡み目 L の情報を読み込むナノフレーズ w_L （具体例は第6章の図14）を表示するガウス図 G_L が入る。先に述べていたように S^2 を $\phi(T^2)$ が何重に覆うのか、という幾何的な値は ϕ の正則値（特異点ではない点たちの像） $q_0 \in S^2$ を一つとって $\phi^{-1}(q_0)$ をみればわかる。正則値だから $\phi^{-1}(q_0)$ は有限個（例えば k 個）の点からなる集合 $\{p_i \mid i=1, 2, \dots, k\}$ である。それぞれの点 p_i につき微分 $D_{p_i}\phi$ によって $\det D_{p_i}\phi$ の正負による符号 sgn が定まる。一般論から、あるいは直感的に S^2 を $\phi(T^2)$ が何重に覆うか、という理解から、この符号和は写像度だとわかりガウス積分は

$$\sum_{p_i \in \phi^{-1}(q_0)} \text{sgn}(p_i)$$

となる。この符号 sgn は p_i に対応する $f(s_i) - g(t_i)$ の向きが S^2 の向きと合うか反対かによって正負を定めていると言ひ換えられる。したがって q_0 を見下ろして $f(s), g(t)$ のうち、一方が他方の下に交差していて、かつ q_0 が正則値であることからその交差は横断的となっている。これは第1章のごとく（ただし q_0 の方向で）平面射影図を考えたときに各交点として p_i ($i = 1, 2, \dots, k$) が現れ、その符号 $\text{sgn}(p_i)$ の総和を計算していることに他ならず、これは**絡み数**と呼ばれ、 $lk(C_1, C_2)$ と書かれる。かくして

$$\text{ガウス積分} = \sum_{p_i \in \phi^{-1}(q_0)} \text{sgn}(p_i) = lk(C_1, C_2)$$

が得られ、左辺はしばしば記号 $\langle \bigcirc \rightarrow \bigcirc, \cdot \rangle$ で表される。 $\bigcirc \rightarrow \bigcirc$ の**コード**はパラメーターの組 (s, t) のペアリング、またコードの向きは、どちらのパラメーター側から見下ろしたかを表している。上記で紐に置くパラメーターの組を増やし、紐全体を調べ尽せば、曲線 C_i に沿った粒子の振る舞いだけでなく、DNA、高分子化合物、磁場、飛行機、竜巻などあらゆる場面で現れる渦や紐の絡み具合を調べる保存量、数学的には結び目や絡み目を調べる不変量がたくさん得られるのではないか、というのは自然な考え方である。例えば、結び目の場合に、コードを増やしていくと次のように不変量が得られていく（円周上の点は基点を表す）。

$$\left\langle \bigcirc \otimes \bigcirc, \cdot \right\rangle, \left\langle 2 \bigcirc \otimes \bigcirc + \bigcirc \oplus \bigcirc, \cdot \right\rangle, \dots$$

このような形の不変量は結び目に対して**バシリエフ不変量**と呼び、より広い数学的対象を視野に入れたときは**有限型不変量 (finite type invariants)**とも呼ばれる。第3章において R 行列の観点から解説する**ジョーンズ多項式**は、その変数 q をテイラー展開した係数がどれもバシリエフ不変量となるような量子パラメーター q に関する**絡み目の量子不変量**として知られている⁶⁾。一方でレーザー冷却で実現されるボース凝縮体中の超流体の量子渦において、量子渦糸モデルも上記のビオ・サバルの法則により記述がなされる。局所近似ではない大域的な量をあらわすガウス積分やその一般化 (= 有限型不変量) は、量子渦や位相欠陥が関係する物性においても新たな展開を期待させる。ヘシリティは有限型不変量と渦糸の強さの項からなり、前者も後者も異なった文脈で量子化がなされていることは興味深いといえよう。このように結び目不変量は場の理論の研究や統計力学における理論では、かなり前からその重要性は指摘されて研究の対象となってきたが、これからは物性理論においてもその重要性は増すのではないかと考えられる。また重要な注意として、バシリエフがその不変量を 1990 年に導入して以来、数学者を引きつけ続けている次の予想を紹介しておく。

予想 2 (バシリエフ予想). 任意の 2 つの結び目はバシリエフ不変量により、判別されるだろう。

以降では統計物理の観点より導入されるジョーンズ多項式 (第3章)、物理理論に新たなパラメーターを加えたジョーンズ多項式の一般化 (第4章)、電磁気学からのガウス積分に現れたコード図の一般化・精密化であるナノワード理論 (第6章) を紹介し、最近のバシリエフ予想に関する展望の記述を試みたい。

3. ジョーンズ多項式

ミクロの状態からマクロの状態を統計的に推論し理解する統計力学は、原子論的な立場から理論的に研究する物性物理学の基盤である。そこでは物理の巨視的な動きを統計力学の模型から説明しようとする。そのために考えられる状態 (ステイト) の総和を記述する分配関数を定義する。そして与えられた模型の分配関数が具体的に記述される時は可解だとされる。可解模型は結び目不変量と密接に関連し、結び目不変量を導く可解模型が何であるか、可解模型はどのように結び目不変量を導くか、ということは興味を持たれることである。特にジョーンズ多項式は 2 次元統計力学から導かれることがわかっている。そして模型が可解である十分条件は**ヤン-バクスター方程式**で与えられる。本章では分配関数を与える 2 次元におけるステイト (状態) から、簡単な方法でジョーンズ多項式を導入する。まず結び目射影図に対するボルツマンウエイト wt の定義を与えよう。

結び目射影図 D の交点 c の十分小さな近傍 $N(c)$ に対し、近傍 $N(c_0)$ タイプ、 $N(c_1)$ タイプという 2 通りの取り替えを行う (図5)。この取り替えはスプライス (splice) と呼ばれる。 n 交点を持つ D に対して、各交点で 2 通りのスプライスを行うと、 D に対しては合計 2^n 通りのスプライスが考えられる。写像 $\{c \mid c \text{ は } D \text{ の交点} \} \rightarrow \{0, 1\}$ の決め方は 2^n 通りあり、その各々に対応する平面上の円周配置を D のステイト s と定義する。 s が含む $N(c_0)$ タイプの個数から $N(c_1)$ タイプの個数を引いた数を $\sigma(s)$ としよう。ステ

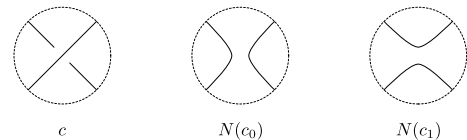


図5: $N(c)$ に対する $N(c_0)$ タイプ、 $N(c_1)$ タイプ

イト s に入る円周の個数を $|s|$ と表記する。ステイト s のウエイト wt を (4) で定める。

$$\text{wt}(s) = A^{\sigma(s)} (-A^2 - A^{-2})^{|s|}. \quad (4)$$

このとき分配関数の観点から、その総和としてジョーンズ

多項式は (5) により与えられる。

$$V_K(A) = (-A)^{-3w(D)} \sum_s \text{wt}(s). \quad (5)$$

4. ジョーンズ多項式の圏論化 (categorification)

ジョーンズ多項式はテイラー展開によりバシリエフ不変量の母関数とみなされる。バシリエフ不変量は物性物理 (材料化学) への応用がなされ⁷⁾、ジョーンズ多項式とその一般化は素粒子物理の観点から捉えられた。ところが 2000 年ごろ、これらの枠組みから一段階はみ出すようなパラメーター t を導入する形でジョーンズ多項式は拡張された：

$$\sum_{i,j} t^i q^j \text{rank } H^{i,j}(K) \quad (t = -1 \text{ なら、ジョーンズ多項式}). \quad (6)$$

$H^{i,j}$ は i についてのホモロジーであり、ジョーンズ多項式の圏論化と呼ばれ、Topological quantum field theory を導く。

一方、ある変数 A のジョーンズ多項式に対応するヤン-バスター方程式の解 (R 行列) は次で与えられる (I は単位行列、 U はある行列)：

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} & A - A^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix} (= AI + A^{-1}U). \quad (7)$$

本章では R 行列 (7) の成分を詳しく見ることで、この圏論化のようすを眺めてみたい。そのために図 6 ような結び目射影図 D (輪切り図式) を使って第 3 章の統計力学的な議論をさらに掘り下げてみよう。輪切り図式はまっすぐな縦

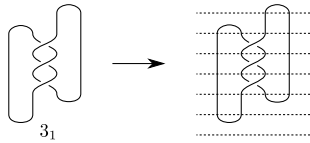


図 6: 結び目射影図 (左) と輪切り図式 (右)

線の他、基本パーツと呼ばれる交点、極点 (極大点もしくは極小点) の組み合わせで書き表される。ステイトの全ての円周に s に任意のやり方で向きを考えたものを $\hat{s}$ としよう。その局所的なウエイトは次のように決められる。

- スプライスされた交点が $N(c_0)$ タイプなら A , $N(c_1)$ タイプなら A^{-1} を、その交点のウエイトにかける。
- 輪切り図式の s に対して極点は反時計回り (時計回り) ならば $(-A^2)^{1/2}$ ($(-A^2)^{-1/2}$) をかける。極点を含まない縦線は $(-A^2)^0 = 1$ をかける。

図 7 に 3 例あげておく。このように基本パーツ E から決ま

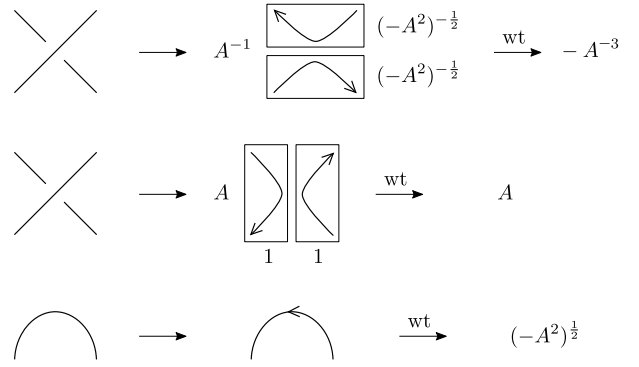


図 7 交点または極点 (左)、向き付きのステイトのパーツ (中)、ウエイト (右)

る $\hat{s}$ の局所部分 $E(\hat{s})$ のウエイトを定義すると $\text{wt}(s)$ は、

$$\text{wt}(s) = \sum_{\hat{s}} \prod_{E(\hat{s})} \text{wt}(E(\hat{s})) \quad (8)$$

ともかける。ここで輪切りの端点に入っている向きに対応して、上方向を e_1 、下方向を e_0 とすれば、輪切りの横線における行列の積の意味を与える。なぜならば、 m は輪切りの切り口に出ている紐の端点の数とすると輪切りの横線に 2 次元ベクトル空間 $V = \langle \{e_0, e_1\} \rangle$ を m 個テンソル積した空間 $V^{\otimes m}$ 、また、2 つの隣り合う輪切り線の間は線型写像だとみなすことができるからである。特に、ある線型写像 $V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ はジョーンズ多項式を導く 2 次元表現と対応するものとして知られ、交点にはヤン-バスター方程式の R 行列が対応している⁶⁾。例えば、図 7 の最初の例は、(7) の U 側の (3, 3) 成分に対応している。構成上、状態 $\hat{s}$ たちは状態 s たちを細分化しておりジョーンズ多項式 V_K は次で与えられる。

$$V_K(A) = (-A)^{-3w(D)} \sum_{D \text{ の } \hat{s}} \prod_{E(\hat{s})} \text{wt}(E(\hat{s})). \quad (9)$$

(9) の右辺は、向きのついた結び目射影図 D の取り方に依らないことは、ライデマイスター変形 (図 9) をチェックして確かめられる (読者は「不変性の証明」が第 2 章のストークスの定理で示した方法と比較して雰囲気異なることを実感してみてほしい)。ステイト $\hat{s}$ は、ステイト s を細かくとっているの、**細分化されたステイト (enhanced state, refined state)** と呼ばれ、大文字 S により表記される⁷⁾。(4) からわかるように wt は二項係数分だけさらに細かくとることになり、 s の中で反時計回りに向き付けられた円周の個数から時計回りに向き付けられた円周の個数

⁶⁾参考文献として村上順の著書⁹⁾ を挙げておく。

⁷⁾この訳語は奈良女子大学的小林毅教授と一緒に考えてくださった。

を引いた数を $\tau(S)$ として $\tau(S) \equiv |s| \pmod{2}$ を用いれば、

$$\begin{aligned} V_K(A) &= (-A)^{-3w(D)} \sum_S (-1)^{\tau(S)} A^{\sigma(S)-2\tau(S)} \\ &= \sum_S (-1)^{\frac{w(D)-\sigma(S)}{2}} q^{w(D)+\frac{w(D)-\sigma(S)}{2}+\tau(S)} \\ &= \sum_S (-1)^{i(S)} q^{j(S)}. \end{aligned}$$

最後の行は $i(S), j(S)$ を $i(S) := \frac{w(D)-\sigma(S)}{2}, j(S) := w(D) + \frac{w(D)-\sigma(S)}{2} + \tau(S)$ と定義することによる等号である。このとき $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 係数の加群 $C^{i,j}(D)$ を ${}^8C^{i,j}(D) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[\{S : D \text{ の、交点に関する向き付けをもつ細分化されたステイト } | i(S) = i, j(S) = j\}]$ により定める。境界作用素 $d^i : C^{i,j}(D) \rightarrow C^{i+1,j}(D)$ を

$$d^i(S) = \sum_{S \text{ の } N(c_0) \text{ タイプの交点}} T$$

(ステイト T とステイト S の対応は図8のリストにより定める) によって定義することで整数 j ごとの複体 $\{C^{i,j}(D), d^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$

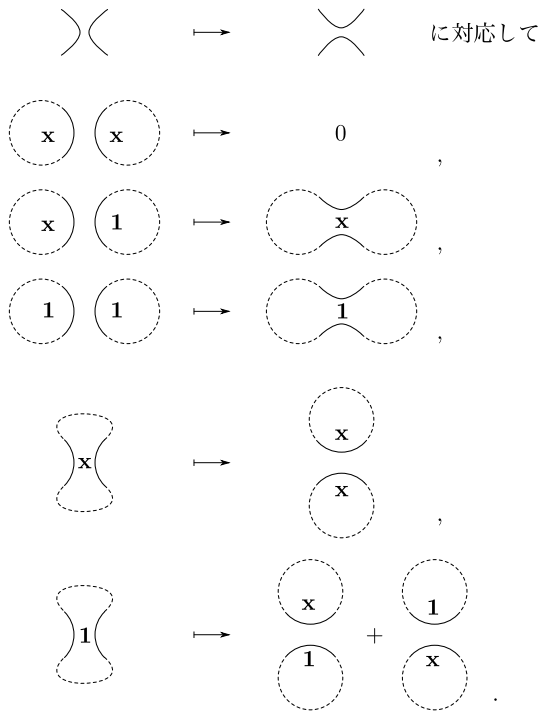


図8 フロベニウス演算 (反時計回りの円周を $\mathbf{1}$ 、時計回りの円周を $\mathbf{x}$ と記載している)。写像を表す矢印の左をステイト S 、右をステイト T とする。

から得られるホモロジー群 $H^{i,j}(D)$ が定まる。数学の議論により $H^{i,j}(D)$ は結び目 K の射影図 D に依らないことが証明されるので、 $H^{i,j}(K)$ と書かれる。

定理 1 (ホバノフ, 2000). K を向きの入った結び目、 $J(K)(q)$ を自明な結び目に対し $q + q^{-1}$ の値を返すジョーンズ多項

⁸議論を加えることで $\mathbf{Z}$ 加群による定義も得られるが、ここでは割愛する。

式とする。結び目不変量 $H^{i,j}(K)$ が存在し次を満たす：

$$J(K)(q) = \sum_{i,j} (-1)^i q^j \text{rank} H^{i,j}(K).$$

ここまで統計力学の観点を保持したホバノフによるホモロジー $H^{i,j}(K)$ のビロの再構成を解説してきた。同じような方法により新しい物理パラメーターは次々に作成できるだろうか、という問いは興味深く、しかし一般に難問である。そのためには、結び目不変量であることを裏付けるホモロジーにおける関係式を深く理解しておくことが重要である。ホバノフホモロジー群 $H^{i,j}(D)$ が結び目不変量であることは TQFT (Topological Quantum Field Theory) の観点から、曲面の圏からの函手により得る方法が有名である。一方で、論文⁹⁾ でビロが主張するように、鎖ホモトピーをこの細分化されたステイトの関係式として直接与えておく必要もある⁹⁾。3種類のライデマイスター変形のうち、鎖ホモトピーとレトラクションの明示式は RI についてビロ⁹⁾ が、 RII 、 $RIII$ については筆者¹¹⁾ により与えられている。ホバノフホモロジーは変種としてリーホモロジーを生み、結び目種数におけるミルナー予想の再証明へとつながっていった¹⁰⁾。なおホバノフホモロジーとリーホモロジーを含む一般的な TQFT によるホモロジー¹⁴⁾ が図8に2パラメーターを入れることで得られるが、その構成によるホモロジーについての鎖ホモトピー明示式の一般式とレトラクションの明示式も筆者により得られている¹⁵⁾。

5. 結び目射影図とバシリエフ不変量

第2章では物性物理で見られるガウス積分を元に結び目を3次元空間において扱う方法を、第3章では2次元における可解模型の観点からジョーンズ多項式を定義した。ここでは2次元における結び目射影図で結び目を扱うことで見逃している点について少し触れ、その中間的な立場にあるナノワード理論へと入っていこうと思う。バシリエフ不変量は強力なのは間違いないが、取り扱いについては次の Östlund¹⁶⁾ の注意がある¹¹⁾

定理 2 (Östlund¹⁶⁾, 2001). バシリエフ不変量は RII の独立性は導かない。すなわち次が言える。結び目射影図全体の集合からアーベル群に値をとる写像 v を考える。 v が有限型であり、かつ RI , $RIII$ で変わらないなら、 RII においても不変である。

ここで、ジョーンズ多項式がトポロジー不変量であることを示す時に使われる、結び目の同値性に関する古典的な事実を対比させよう。

⁹⁾ これは単なる再構成の分析ではない。例えば、ホバノフホモロジーが (符号を除いて) 函手性をもつことが証明された際、その一つの方法は、フロベニウス演算を詳しく見てなされたものである¹⁰⁾。

¹⁰⁾ ラスムッセン¹²⁾ による。ミルナー予想までの日本語による解説は拙著¹³⁾ に詳しく記載した。

¹¹⁾ この問題周辺の総説は少ない。拙著¹⁷⁾ を挙げておく。

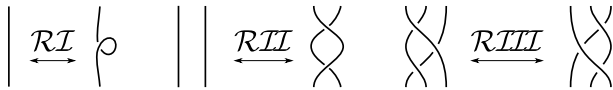


図 9: RI , RII , $RIII$

定理 3 (ライデマイスターの定理 (1927)). 2つの結び目 K と K' が同値であることの必要十分条件は、ライデマイスター変形と呼ばれる 3 種類の局所変形 RI , RII , $RIII$ からなる有限列で移り合うことである。

テイト予想、あるいは可解格子模型の考えで、結び目 K の結び目射影図 D_K を使って研究していく時に、予想 2 で完全不変量だと期待されるバシリエフ不変量 v の同値性 $v(D_K) = v(D_{K'})$ が、結び目の同値性とは等しくあつてほしいと思うのは自然である。したがってライデマイスターの定理を改良し、 RII を取り除くことができるのではないか、という期待がでた (予想 3)。

予想 3 (Östlund 予想). 任意の平面曲線に対して、図 10 の 2 種類の局所変形 RI , $RIII$ からなる、ある有限列が存在し、交点のない平面曲線となるだろう。

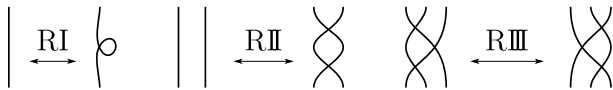


図 10: RI , $RIII$

期待通りなら、結び目射影図を用いた結び目・絡み目の解析方法が根本的に変わり、バシリエフ不変量を足し上げているジョーンズ多項式への考え方も変わってくるはずだ。しかし近年、予想 3 (Östlund 予想) の反例がでた。

定理 4 (Hagg-Yazinski, 2014). 図 11 左端の平面曲線は、 RI と $RIII$ による、どんな有限列をもってきても、交点のない形にはならない。

この平面曲線をながめていると、2 辺形を数珠のように増やしていくことにより、Östlund 予想の反例がたくさん作成できる。また、内側・外側の 4 辺形を $n (\geq 5)$ 辺形にしたり、取り囲む 2 辺形の取り囲み方を多重化したりして、一般化できる¹⁹⁾ である (図 11)。15 交点以下ではどうか、また、最小交点が奇数の場合に反例は存在するのか? という問題については、最近 15 交点の例が証明された (定理 5)¹²⁾。

定理 5 (伊藤-瀧村¹⁹⁾, 2016). 図 12 の平面曲線は、どんな RI と $RIII$ の有限列によっても、交点のない形にはならない。

Östlund 予想の反例で 14 交点以下のものがあるかは、未解決なままである。一方、 RI と他のライデマイスター変形

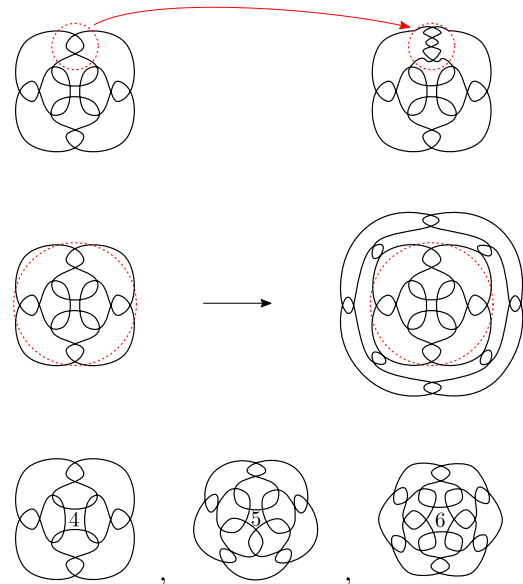


図 11: Hagge-Yazinski の例 (左端) と伊藤-瀧村¹⁹⁾ による一般化

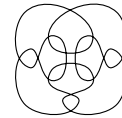


図 12: 15 交点の平面曲線

の組み合わせにおけるバシリエフ型不変量の組織的な構成方法は、ごく最近与えられた^{20, 21)}。

6. ナノワード理論とバシリエフ予想

ナノワード理論は 2005 年ごろからトゥラエフにより導入された²²⁾。モチベーションとしては一つ目に $2+1$ 次元の TQFT (Topological Quantum Field Theory) の観点から、曲面上の曲線のトポロジカルな生成元で「良いもの」を得たいということ、二つ目に結び目の「絡み具合」の情報を明示的に捉まえること、三つ目に後述するような被覆理論の展開ということがあったと考えられる。それではナノワードを紹介したい。

α を集合、 $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。 α 上の長さ $n (\geq 1)$ のワードは $w: \hat{n} \rightarrow \alpha$ と定義する。長さ 0 のワードは $\emptyset$ とする。アルファベット α, α' に対し、写像 $f: \alpha \rightarrow \alpha'$ は α 上のワード w と α' 上のワード w' を文字ごとに移す写像 $f_{\#}: \alpha$ 上のワードからなる全体集合 $\rightarrow \alpha'$ 上のワードからなる全体集合を誘導する。言い換えるなら、文字集合間の写像 f が文字列集合間の写像 $f_{\#}$ を決めることを「 f が $f_{\#}$ を誘導する」というのである。図 13 を見てみよう。ここでは文字列 $ababa$ は単なる文字列ではない (曲線の特異点の位置のオーダーを記述している)。この幾何的な対象を被覆 (covering) する対象があったとき、被覆される側 (ここでは $ababa$) のトポロジカルな不変量は被覆する空間における対象の不変量を導く。定義 4 以降の α -アルファベットと

¹²⁾横山知郎によって最初にその可能性を指摘された。

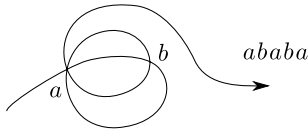


図 13: 文字列に幾何的な構造の被覆 (covering) を考えていく。

ワードの組からなるナノワードの理論というものはこのような手の届く空間を使って手の届かない空間に手を伸ばす「結び目の圏論化」の理論である。

定義 4 (α -アルファベット). $\alpha, \mathcal{A}$ をそれぞれ集合とする。 $\mathcal{A}$ が $|\cdot| : \mathcal{A} \ni A \mapsto |A| \in \alpha$ なる projection と呼ばれる写像を持つときに $\mathcal{A}$ を α -アルファベットとよぶ。2つの α -アルファベット $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に対して射 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ とは、写像 $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ が $|A| = |f(A)|$ を満たすもののことである。この f が全単射ならば $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ の同型と呼ぶ。

定義 4 は projection という 1 段階の文字の covering を考えているだけなのであるが、このシンプルな仕掛けは十分豊富な情報、 α 上のエタールワードを生み出す。

定義 5 (エタールワード). α をアルファベットとする。 $\mathcal{A}$ を α -アルファベット $\mathcal{A}$ 、 w を $\mathcal{A}$ 上のワードとする。 $(\mathcal{A}, w)$ をエタールワードとよぶ。2つのエタールワード $(\mathcal{A}, w), (\mathcal{A}', w')$ が同型であるとは、同型 $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ が誘導する $f_{\#}$ が $f_{\#}w = w'$ を満たすことをいう。

定義 5 において、 α は $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ から projection を持っている¹³。ここでエタールワードの情報の豊富さを見るために、かなり特殊な場合を考えてみよう。例えば α の元が 2 つしかない場合、ありとあらゆる文字列の各文字が、2 種類 (例えば紅白) の色分けがなされる。実は、驚くべきことにジョーンズ多項式のすべてはそのような文字列によって十分に記述されてしまう。さらには結び目それ自体も、4 元の α と対応する。すなわち結び目とは文字たちを 4 種類の色分けをした、(以下のように特別な) エタールワードで十分に記述できる幾何的対象なのである。準備して述べよう。

定義 6. 同じ文字がちょうど 2 回ずつ現れる文字列をガウスワードと呼ぶ。

定義 7. α をアルファベットとする。 $\mathcal{A}$ を α -アルファベット $\mathcal{A}$ 、 w を $\mathcal{A}$ 上のワードとする。 w がガウスワードであるエタールワード $(\mathcal{A}, w)$ を α 上のナノワードとよぶ。

ここで特に α として $\alpha_* = \{a_+, a_-, b_+, b_-\}$ という 4 元集合をもってくる (対応さえわかれば $\{1, 2, 3, 4\}$ でも構わない)。すると、 α_* 上のナノワードの同値類全体は結び目全体を単射で埋め込んでいる。この意味は大きい。結び目

¹³ この projection の様子を代数幾何学の言葉を用いて “ α のエタール被覆” と呼んでいる²²⁾。

を何らかの意味で被覆する幾何的対象が一般のナノワードで捉えられるなら、それは結び目不変量として使用できる対象であることを意味するからである。また、反対方向に、結び目の情報の一部 (α の要素が少ないナノワード) を使ってトポロジカルな不変量が作成できるならば、それは (扱っているナノワードの間に函手性のある状況ならば) 結び目不変量として使うことができるからである。

では、結び目がナノワードで記述されることを具体例 (図 14) を見ながら理解しよう。 $a_{\pm}, b_{\pm}$ は交点に付随する情報で $+, -$ は定義 3 の符号を表し、 a, b は紐の上にスタート地点 (基点) をつけた時に結び目射影図上の交点でどちらが先に通過するかを表す情報である。基点で紐を切って、そ

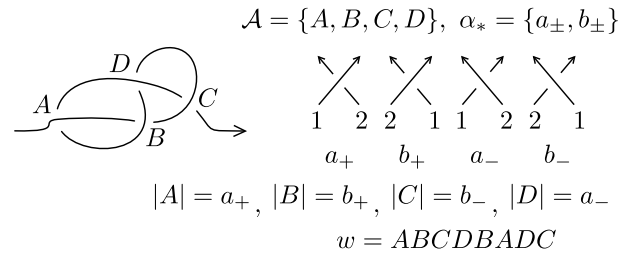


図 14: long knot とナノワード

の端点がある軸 (例えば x 軸) に関して十分遠く (理論として正確には $-\infty$ と ∞) にそれぞれ引っ張って置く。このようなモデルを long knot と呼ぶ。long knot 全体の集合と結び目の全体集合の間には全単射が存在して集合として等価であることが知られている。今、この long knot に向きをつけ、その結び目射影図を調べてみる。基点から始まり紐をたどっていき、最初に出会った交点にラベル A をおく。図 14 ではたまたま平面上の交点がなす交差は最初に通過したパス 1 と 2 回目この交点を通過するパス 2 の関係がパス 1 からパス 2 へ反時計回りになっているので、 a とし、符号は正であるから a_+ である。このような作業を紐をたどりながら行くと $\{A, B, C, D\}$ が α_* ($= \{a_{\pm}, b_{\pm}\}$) に projection を持つような α_* 上のナノワードが存在することになる。すべての結び目はこのようにして捉えられ、ライデマイスター変形の議論も展開できる。驚くべきことに次が成り立つ (前半がトゥラエフ²³⁾、後半がマントウロフ²⁴⁾)。定理 6 の応用は筆者の論文²⁵⁾ でなされている。

定理 6 (トゥラエフ, マントウロフ). ジョーンズ多項式は $\{+, -\}$ 上のナノワードのみから決まる。ホバノフホモロジーも同様である。

ナノワード理論におけるバシリエフ不変量の組織的な拡張理論はギブソンと筆者の論文²⁶⁾ が最初である。これは、結び目 (係数, $\alpha = \alpha_*$ の場合) におけるグサロフ-ポリャク-ピロ (第 2 章) による有限型不変量 (以下、GPV 不変量と略記) をより一般の係数かつ一般の α 上のナノワード

に拡張したものである。この論文の $\alpha = \{1\}$ のときの 4 次有限型不変量は、いわゆる「トゥラエフの予想」(トゥラエフ²²⁾) の再解決¹⁴ となる不変量を導いた。その後、福永知則-山口崇幸-山野井隆晃²⁹⁾ はギブソンと筆者の論文に対し、計算方法の開発や更なる計算結果を与えた。

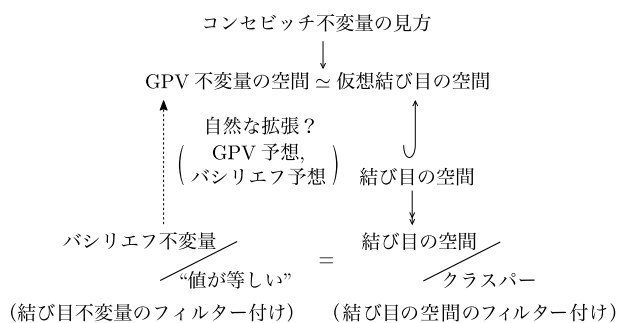


図 15: バシリエフ予想とその周辺

最後に、バシリエフ予想(予想 2)とナノワード不変量の特別な場合である GPV 不変量の関係について述べておこう(図 15)。GPV 不変量全体からなる集合は、その構成上(結び目を単射に入れている)仮想結び目の全体からなる集合と同型である³⁰⁾。もしもバシリエフ不変量が仮想結び目の GPV 不変量に自然に拡張されるというグサロフ-ポリャク-ビロの予想³⁰⁾(**GPV 予想**と呼ぶことにする)が正しく、かつ、**判別の観点**(任意の 2 つの結び目が与えられたとき、どの次数の不変量により判別できるか?)がよく理解されたら、バシリエフ予想に肉薄する。

ここで後者の「判別の観点」はかなり理解されている。バシリエフ不変量は「結び目をほどこ最小手数」である**結び目解消数**の回数 n で次数付けられており、それによりバシリエフ不変量の空間はフィルター付けを持つ。その次数に対しグサロフ³¹⁾、葉廣和夫³²⁾ が独立に得た定理「2 つの結び目に対し $(n-1)$ 次以下のバシリエフ不変量の値が等しいことと、 n 次クラスパーという局所変形による同値関係で等しいことが必要十分である」(図 15 の最下部)が成り立つ。したがって、バシリエフ予想にアプローチするなら「GPV 予想」を「判別の観点」を保持する形で解くことが重要となるであろう。最近では「結び目をほどこ」数の再設定により問題を見やすくする試み(櫻井みぎとと筆者)³³⁾ がなされる一方で、クラスパーを仮想結び目に拡張した小鳥居祐香の方法³⁴⁾ が最近登場し、アプローチする道具も揃いつつある。向こう数年、このあたりの進展に目が離せなくなるような気が筆者はしている。

[図版協力: 船越紫(奈良女子大学)]

参考文献

- 1) D. Rolfsen, Knots and links, *Publish or Perish, Inc., Berkley, Calif.*, 1976.

¹⁴ ギブソン²⁷⁾、マントウロフ²⁸⁾ が同時期に、それぞれ独立に解決した。

- 2) P. G. Tait, *Scientific paper I*, 273. Cambridge University Press, London, 1898.
- 3) K. Murasugi, *Topology* **26** (1987), 187.
- 4) K. A. Perko, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974), 262.
- 5) 今井淳, カレントによる絡み数の解釈(概説) ガウスの積分公式から「コンツェビッチ型」の積分まで, 2000.
- 6) J. Birman and X.-S. Lin, *Invent. Math.* **11** (1993), 225.
- 7) 出口哲生, ランダム結び目と高分子の物理学, 『数理科学』, 12 月号, 12 (1997).
- 8) 村上順, 結び目と量子群, 朝倉書店, 2000.
- 9) O. Viro, *Fund. Math.* **184** (2004), 317.
- 10) M. Jacobsson, *Algebr. Geom. Topol.* **4** (2004), 1211.
- 11) N. Ito, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011), 127.
- 12) J. Rasmussen, *Invent. Math.* **182** (2010), 419.
- 13) 伊藤昇, 結び目理論の圏論(仮), 日本評論社, 近刊予定.
- 14) M. Khovanov, *Fund. Math.* **190** (2006), 179.
- 15) N. Ito, On Khovanov complexes, preprint.
- 16) O.-P. Östlund, Thesis (Ph. D.)—Uppsala Universitet.
- 17) N. Ito, *Knot Projections*, CRC Press, 2016.
- 18) T. Hagge and J. Yazinski, *Banach Center Publ.* **103** (2014), 101.
- 19) N. Ito and Y. Takimura, *Topology Appl.* **210** (2016), 22.
- 20) N. Ito, Space of chord diagrams of spherical curves, preprint.
- 21) N. Ito, *Kodai Math. J.*, accepted.
- 22) V. Turaev, *Jpn. J. Math.* **2** (2007), 1.
- 23) V. Turaev, *Int. Math. Res. Not.* **2006**, Art. ID 84098.
- 24) V. O. Manturov, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **144** (2007), 4451.
- 25) N. Ito, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350002.
- 26) A. Gibson and N. Ito, *Topology Appl.* **158** (2011), 1050.
- 27) A. Gibson, *Math. Ann.* **349** (2011), 871.
- 28) V. O. Manturov, *Sb. Math.* **201** (2010), 693.
- 29) T. Fukunaga, T. Yamaguchi, and T. Yamanoi, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350037.
- 30) M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Topology* **39** (2000), 1045.
- 31) M. Goussarov, POMI Sankt Petersburg preprint, circa 1995 (in Russian).
- 32) K. Habiro, *Geom. Topol.* **4** (2000), 1.
- 33) N. Ito and M. Sakurai, *J. Math. Soc. Japan*, accepted.
- 34) Y. Kotorii, arXiv:1705.10490.

著者紹介または非会員著者の紹介

伊藤 昇: 文字列に依る結び目理論、文字列に依らない結び目理論の双方において形を特徴づける情報が何であるかを探究し、結び目に限らずトポロジーにおける逆問題、圏論化を研究している。

(2019 年 6 月 7 日原稿受付)

abstract: