令和3年度確率・統計試験問題（河邊担当）

令和4年2月2日 3時限 (13:00〜14:10)

[注意] 答案用紙の1枚目の左上に着席した場所を記入すること！(記入例: A3，B10，H5)

[1] ある自動車メーカーでは，エンジンの部品をA社，B社，C社の3つの会社からそれぞれ30%，30%，40%の割合で仕入れているが，この部品の不良率はそれぞれ2%，3%，2%である．仕入れた部品の中から無作為に1つ取り出したとき，それが不良品であった．この不良品がC社のものである確率を求めよ．

[2] 100点満点の試験を37000人の受験者が受けた．この試験の得点が平均65点，標準偏差20点の正規分布に従うとき，次の問いに答えよ．

(1) 80点の受験者は上からおよそ何番目か．

(2) 得点順位が5000番目の受験者の得点はおよそ何点か．

[3] Aクラスの試験の得点は平均45点，標準偏差16点の正規分布に従っており，Bクラスの試験の得点は平均50点，標準偏差12点の正規分布に従っている．この2つのクラスからそれぞれ無作為に1名の生徒を選んだとき，Aクラスの生徒の得点がBクラスの生徒の得点を上回る確率を求めよ．

[4] ある予備校が実施した模擬試験を受験した生徒の中から無作為に選んだ50人の数学の得点の平均は68.7点，標準偏差は11.5点であった．この模擬試験を受験した生徒の数学の平均点の95%信頼区間を求めよ．また，信頼区間の幅を5点以下にするには少なくとも何名の生徒の得点を調べる必要があるか．ただし，母集団分布は未知とする．

[5] ある模試の受験者の中から，年収が1000万円以上の世帯の子供10人を選んで，数学の得点を調べたところ，次のデータを得た．

62　55　43　40　88　32　48　70　61　51

この模試の受験者全体の数学の平均点は45.5点であった．年収が1000万円以上の世帯の子供の数学の平均点は受験者全体の平均点より高いといえるか．有意水準10%で検定せよ．

[6] ある飲食店で提供される牛丼の量は，標準偏差15gの正規分布に従うことが知られている．この飲食店のオーナーは牛丼の量のばらつきを抑えるため新しい盛り付け方を考案し，実際に盛り付けた9つの牛丼の量を調べたところ，標準偏差は7gであった．新しい盛り付け方でばらつきが小さくなったといえるか．有意水準5%で検定せよ．

令和3年度 確率・統計試験の解答

1 取り出した部品がA社，B社，C社である事象をそれぞれA，B，Cとし，取り出した部品が不良品である事象をDとする．このとき，

$P(A)=0.3$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，$P(D|A)=0.02$，$P(D|B)=0.03$，$P(D|C)=0.02$である．よって，ベイズの定理より，

$$P(C|D)=\frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}$$

$$=\frac{0.02\times0.4}{0.02\times0.3+0.03\times0.3+0.02\times0.4}=\frac{8}{23}\fallingdotseq 0.35$$

2 試験の得点XはN(65, 20²)に従うので，$Z=\frac{X-65}{20}$はN(0, 1)に従う．

(1) $P(X\geq 80)=P\left(\frac{X-65}{20}\geq\frac{80-65}{20}\right)=P(Z\geq 0.75)$

$=0.5-\Phi(0.75)=0.5-0.2734=0.2266$．よって，$37000\times0.2266=8384.2$
ゆえに，およそ8384番目．

(2) $P(X\geq k)=\frac{5000}{37000}=0.135$となるkを求めればよい．ここで

$$P(X\geq k)=P\left(Z\geq\frac{k-65}{20}\right)=0.5-\Phi\left(\frac{k-65}{20}\right)$$

なので，$\Phi\left(\frac{k-65}{20}\right)=0.5-0.135=0.365$．正規分布表IIより，

$\frac{k-65}{20}=1.1031$なので，$k=87.062$．よって，求める答は87点．

3 Aクラスの全体の得点をX，Bクラスの全体の得点をYとすると，正規分布の再生性より，$X-Y$は$N(45-50, 16^2+12^2)=N(-5, 20^2)$に従う．よって，

$Z=\dfrac{X-Y+5}{20}$は$N(0,1)$に従うので，

$P(X-Y>0)=P(Z>0.25)=0.5-\Phi(0.25)=0.5-0.987=\underline{0.4013}$

4 母集団分布が未知であるが，大標本なので公式3が使える．データより，

$n=50$，$\bar{x}=68.7$，$s=11.5$である．関係式$u^2=\dfrac{n}{n-1}s^2$より，$u=11.62$．

$\alpha=0.05$なので$z(\alpha/2)=z(0.025)=1.96$．これらを公式に代入すると

$$68.7-\frac{11.62}{\sqrt{50}}\times1.96\leqq\mu\leqq68.7+\frac{11.62}{\sqrt{50}}\times1.96$$

信頼下限は切り捨て，信頼上限は切り上げて信頼区間を求めると，

$\underline{65.4\leqq\mu\leqq72.0}$．

信頼区間の幅を5点以下にするには

$$\frac{2u}{\sqrt{n}}\cdot z(\alpha/2)\leqq5\iff\frac{2\times11.62}{\sqrt{n}}\times1.96\leqq5$$

$$\therefore\sqrt{n}\geqq\frac{2\times11.62\times1.96}{5}\fallingdotseq9.11\quad\therefore n\geqq82.99\quad\therefore\underline{n\geqq83}.$$

$\boxed{5}$ 帰無仮説H_0と対立仮説H_1を

$$H_0: \mu = 45.5, \quad H_1: \mu > 45.5$$

と設定して、有意水準$\alpha = 0.1$で右側検定する。棄却域は

$$t \geq t_9(0.1) = 1.383$$

$\bar{X}$の実現値は55, U^2の実現値は262.44. よって. Tの実現値は

$$t = \frac{55 - 45.5}{\sqrt{266.44}/\sqrt{10}} = 1.854$$

よって棄却域に入る。ゆえに、全体の平均点より高いといえる。

$\boxed{6}$ 帰無仮説H_0と対立仮説H_1を

$$H_0: \sigma^2 = 15^2, \quad H_1: \sigma^2 < 15^2$$

と設定して、有意水準$\alpha = 0.05$で左側検定する。棄却域は

$$\chi^2 \leq \chi_8^2(1 - 0.05) = 2.733$$

S^2の実現値は49. よって. χ^2の実現値は

$$\chi^2 = \frac{9 \times 49}{15^2} = 1.96$$

よって棄却域に入る。ゆえに、ばらつきは小さくなったといえる。