無限次元測度特論
— 位相空間上の測度 —

お茶の水女子大学大学院
数理・情報科学専攻集中講義

平成 15 年 1 月 27 日～31 日

付章：講義で参照される定理

測度論からの準備

- **写像の可測性**

(1) $(\Omega,\mathcal{A})$，$(\Phi,\mathcal{B})$ は可測空間，$\xi:\Omega\to\Phi$ は写像とする．このとき，ξ が $(\mathcal{A},\mathcal{B})$**-可測** $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B\in\mathcal{B}$ に対して $\xi^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

(2) $f:\Omega\to\mathbb{R}$ は実数値関数とする．このとき，f が **Borel 可測** $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a\in\mathbb{R}$ に対して $\{\omega\in\Omega:f(\omega)<a\}\in\mathcal{A}$.

- **集合族によって生成される σ-集合体.**

Ω は空でない集合，$\mathcal{D}$ は Ω の部分集合からなる空でない集合族とする．このとき，$\mathcal{D}$ を含む最小の σ-集合体がただ一つ存在する．それを $\sigma(\mathcal{D})$ とかき，$\mathcal{D}$ によって**生成される σ-集合体**という．実際，$\sigma(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ を含むすべての σ-集合体の共通部分として与えられる．

- **可測性の判定.**

$(\Omega,\mathcal{A})$，$(\Phi,\mathcal{B})$ は可測空間，$\mathcal{B}_0$ は $\mathcal{B}$ の部分集合族で $\sigma(\mathcal{B}_0)=\mathcal{B}$ とする．$\xi:\Omega\to\Phi$ は写像とする．このとき，以下が成り立つ:

(1) $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0))=\xi^{-1}(\mathcal{B})$.

(2) ξ が $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-可測 $\Longleftrightarrow$ $\forall B_0\in\mathcal{B}_0$ に対して $\xi^{-1}(B_0)\in\mathcal{A}$.

- **Dynkin System Theorem.**

Ω は空でない集合で，Ω の部分集合からなる集合族 $\mathcal{D}$ は**Dynkin system** とする．すなわち次の 3 つの条件を満たす:

(a) $\Omega\in\mathcal{D}$.

(b) $A,B\in\mathcal{D}$ で，$B\subset A$ ならば $A-B\in\mathcal{D}$.

(c) $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{D}$ で $A_n\uparrow A$ ならば $A\in\mathcal{D}$.

さらに，$\mathcal{E}$ は Ω の部分集合からなる集合族で有限積に関して閉じており，$\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$ であるとする．このとき，$\sigma(\mathcal{E})\subset\mathcal{D}$ となる．

- **写像族によって生成される σ-集合体.**

Ω は空でない集合，$(\Phi,\mathcal{B})$ は可測空間，Γ は Ω から Φ への写像からなる空でない族とする．このとき，Γ に属する写像をすべて $\mathcal{B}$ に関して可測にする最小の σ-集合体が Ω 上にただ一つ存在する．それを $\sigma(\Gamma)$ とかき，Γ によって**生成される σ-集合体**という．実際，$\sigma(\Gamma)$ は

$$\sigma(\Gamma)=\sigma(\{\xi^{-1}(B):\xi\in\Gamma,B\in\mathcal{B}\})$$

で与えられる．この σ-集合体は次の性質をもつ:

(1) $(\Omega', \mathcal{A}')$ は可測空間で，$\eta : \Omega' \to \Omega$ は写像とする．このとき，η が $(\mathcal{A}', \sigma(\Gamma))$-可測 $\Longleftrightarrow$ 各 $\xi \in \Gamma$ に対して，写像 $\xi \circ \eta$ が $(\mathcal{A}', \mathcal{B})$-可測．

- **直積 σ-集合体**.

$(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ は可測空間の族とする．次の形の可測長方形

$$A = \Pi_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha, \quad \text{各 } A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha \text{ で，有限個の } \alpha \in \Gamma \text{ を除いて } A_\alpha = \Omega_\alpha$$

によって生成された直積集合 $\Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$ 上の σ-集合体を $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ の**直積 σ-集合体**といい，$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha$ で表す．特に，すべての $\alpha \in \Gamma$ に対して $\Omega_\alpha = \Omega$，$\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}$ のときは，$(\Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha, \Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha)$ を $(\Omega^\Gamma, \mathcal{A}^\Gamma)$ で表す．直積 σ-集合体は次の性質をもつ:

(1) 各 $\alpha \in \Gamma$ に対して

$$\pi_\alpha(\omega) = \omega_\alpha, \quad \omega = (\omega_\alpha)_{\alpha \in \Gamma} \in \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$$

によって射影 $\pi_\alpha : \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha \to \Omega_\alpha$ を定義する．このとき，直積 σ-集合体 $\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha$ はすべての射影 $\pi_\alpha : \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha \to \Omega_\alpha$ を $\mathcal{A}_\alpha$ に関して可測にする最小の σ-集合体である．それゆえ

$$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha = \sigma\left(\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : \alpha \in \Gamma, A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha\}\right)$$

である．さらに，各 $\alpha \in \Gamma$ に対して $\mathcal{D}_\alpha$ は $\mathcal{A}_\alpha$ の部分集合族で $\sigma(\mathcal{D}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha$ とすると

$$\Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha = \sigma\left(\{\pi_\alpha^{-1}(A_\alpha) : \alpha \in \Gamma, A_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha\}\right)$$

でもある．

(2) $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間，$f_\alpha : \Omega \to \Omega_\alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$ は写像の族で，写像 $f : \Omega \to \Pi_{\alpha \in \Gamma} \Omega_\alpha$ を $f(\omega) := (f_\alpha(\omega))_{\alpha \in \Gamma}$ $(\omega \in \Omega)$ で定義する．このとき

$$f \text{ が } (\mathcal{A}, \Pi_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{A}_\alpha)\text{-可測} \Longleftrightarrow \text{すべての } \alpha \in \Gamma \text{ に対して } f_\alpha \text{ が } (\mathcal{A}, \mathcal{A}_\alpha)\text{-可測}.$$

- **Carathéodory-Hahn Extension Theorem.**

Ω は空でない集合，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合からなる集合体とする．有限加法的な実数値集合関数 $\lambda : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{F}$ 上で可算加法的ならば，λ は可算加法的な拡張 $\bar{\lambda} : \sigma(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ をただ一つもつ．

<u>距離空間論からの準備</u>

- **点と集合の距離**.

(S, d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき，点 s と集合 A の**距離**を

$$d(s, A) := \inf\{d(s, t) : t \in A\}$$

で定義する．この距離は次の性質をもつ:

(1) 不等式

$$|d(s,A)-d(t,A)| \le d(s,t) \quad \text{for all } s,t \in S$$

を満たす．それゆえ，写像 $s \in S \mapsto d(s,A)$ は一様連続.

(2) A が閉集合のとき，$s \in A \iff d(s,A)=0$.

- **距離空間におけるコンパクト性判定条件.**

(S,d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき，次の条件は同値:

(a) A は相対コンパクト, i.e., $\bar{A}$ がコンパクト.

(b) $\bar{A}$ は可算コンパクト，i.e., $\bar{A}$ の任意の可算開被覆は有限部分被覆をもつ.

(c) A は相対点列コンパクト，i.e., A の中の任意の点列は収束する部分列をもつ (収束先は A に属する必要はない).

(d) $\bar{A}$ は完備かつ A は全有界，i.e., $\forall\varepsilon>0$ に対して有限個の点 $s_1,\dots,s_n$ が存在して，$A \subset \cup_{i=1}^{n} B(s_i,\varepsilon)$ とできる (このとき，点 $s_1,\dots,s_n$ は A に属していなくてもよい)．この点の集合 $\{s_1,\dots,s_n\}$ のことを集合 A の **ε-網** (ε-net) という.

- **距離空間における可分性の判定条件.**

(S,d) は距離空間，$A \subset S$ とする．このとき次の条件は同値.

(a) S は可分.

(b) S は第 2 可算公理を満たす，i.e., S は可算個の集合からなる開基底をもつ.

(c) S は fully Lindelöf 空間，i.e., S の任意の部分集合の任意の開被覆は可算部分被覆をもつ.

(d) S は $\inf\{d(s,t) : s,t \in A, s \neq t\} > 0$ を満たす非可算部分集合 A をもたない.

位相空間論からの準備

- **2 つの位相が一致するための十分条件.**

S は空でない集合，τ_1，τ_2 は S 上の位相とし，τ_1 は τ_2 よりも強く，(S,τ_1) はコンパクト空間，(S,τ_2) は Hausdorff 空間とする．このとき，2 つの位相 τ_1 と τ_2 は一致する.

- **$C_b(S)$ の可分性.**

S は完全正則空間とする．このとき，Banach 空間 $C_b(S)$ が可分 $\iff$ S はコンパクト距離付け可能.

- **完全正則空間の閉集合とコンパクト集合の連続関数による分離.**

S は完全正則空間，$F \subset S$ は閉集合，$K \subset S$ はコンパクト集合とする．このとき，$0 \le f \le 1, f(F)=0, f(K)=1$ を満たす S 上の連続関数 $f \in C_b(S)$ が存在する.

- **下半連続・上半連続関数.**

S は Hausdorff 空間，$f : S \to \mathbb{R}$ は関数とする．

(1) f が**下半連続** (lower semicontinuous) $\iff$ 各 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{s \in S : f(s) > a\}$ は S の開集合．

(2) f が**上半連続** (upper semicontinuous) $\iff$ 各 $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{s \in S : f(s) < a\}$ は S の開集合．

下半連続・上半連続関数は次の性質をもつ:

(a) 開集合の定義関数は下半連続．閉集合の定義関数は上半連続．

(b) f が下半連続 $\iff$ $-f$ が上半連続．

(c) f が連続 $\iff$ f は下半連続かつ上半連続．

(d) f が下半連続 $\iff$ S の点からなる任意のネット $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ と $s \in S$ に対して

$$f(s) \le \liminf_{\alpha\in\Gamma} f(s_\alpha).$$

f が上半連続 $\iff$ S の点からなる任意のネット $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ と $s \in S$ に対して

$$\limsup_{\alpha\in\Gamma} f(s_\alpha) \le f(s).$$

(e) コンパクト集合上の下半連続 (上半連続) 関数はそこで最小値 (最大値) をとる．

(f) $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の下半連続関数族とする．このとき，$\sup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ は下半連続．特に，Γ が有限集合のときは，$\inf_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ も下半連続．同様に，$\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の上半連続関数族とすると，$\inf_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ は上半連続．特に，Γ が有限集合のときは，$\sup_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ も上半連続．

(g) S は完全正則空間とする．このとき，S 上の任意の下半連続 (上半連続) 関数は連続関数族の上限 (下限) 関数として表される．特に，S が距離空間の場合は，S 上の任意の下半連続 (上半連続) 関数 f は単調増加 (単調減少) な連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限関数として表される．さらに，ある定数 $M > 0$ が存在して，$|f(s)| \le M$ for all $s \in S$ を満たせば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $|f_n(s)| \le M$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $s \in S$ を満たすように選べる．

函数解析学からの準備

- **The Principle of Uniform Boundedness.**

(1) X はノルム空間で，$A \subset X$ とする．このとき，次の条件は同値:

(i) A は弱有界, i.e., 各 $x^* \in X^*$ に対して，$\sup_{x\in A} |x^*x| < \infty$.

(ii) A は有界, i.e., $\sup_{x\in A} \|x\| < \infty$

(2) X，Y は Banach 空間で，$\mathcal{H}$ は X から Y への有界線形作用素から成る集合とする．このとき，次の 3 つの条件は同値:

(i) $\sup_{T\in\mathcal{H}}\|T\|<\infty$.

(ii) 各 $x\in X$ に対して $\sup_{T\in\mathcal{H}}\|Tx\|<\infty$.

(iii) 各 $x\in X$，各 $y^*\in Y^*$ に対して $\sup_{T\in\mathcal{H}}|y^*Tx|<\infty$.

• **Banach-Alaoglue Theorem.**

X は Banach 空間とする.

(1) X^* の有界閉集合は弱位相 $\sigma(X^*,X)$ に関してコンパクト.

(2) X^* の有界閉集合が弱位相 $\sigma(X^*,X)$ に関して (コンパクト) 距離付け可能となるための必要十分条件は X が可分.

連絡先: 河邊　淳
〒３８０－８５５３　長野県長野市若里４－１７－１　信州大学工学部数学教室
Tel: 026-269-5562
e-mail: jkawabe@gipwc.shinshu-u.ac.jp

§1. 可測写像

この§では可測写像の定義の復習から始めて、距離空間に値をとるBorel可測写像の列の各点収束の極限関数は再びBorel可測となることを及び、この性質は一般の位相空間では成立しないことを示す。

<u>(1.1) 記号</u> この§を通じて

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Xi, \mathcal{B})$: 可測空間

$\sigma(\mathcal{D})$: 集合族 $\mathcal{D}$ によって生成される σ-集合体

<u>(1.2) 定義</u> (可測写像) $\xi : \Omega \to \Xi$ は写像とする。

ξ が <u>$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-可測</u> $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

次の命題は写像の可測性を示す際に役立つ。

<u>(1.3) 命題</u> $\xi : \Omega \to \Xi$ は写像、$\mathcal{B}_0$ は Ξ の部分集合から成る空でない集合族で $\sigma(\mathcal{B}_0) = \mathcal{B}$ とする。

(1) $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0)) = \xi^{-1}(\mathcal{B})$

(2) ξ が $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-可測 $\Leftrightarrow$ $\forall B_0 \in \mathcal{B}_0$ に対して $\xi^{-1}(B_0) \in \mathcal{A}$

(証明) (1) $\xi^{-1}(\mathcal{B}_0) \subset \xi^{-1}(\mathcal{B})$ で、$\xi^{-1}(\mathcal{B})$ は σ-集合体、よって $\sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0)) \subset \xi^{-1}(\mathcal{B})$。よって逆向きの包含関係を示す。

$\mathcal{A}' := \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0))$, $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}'\}$ とおくと.

① $\mathcal{B}'$ は σ-集合体

∵) $\mathcal{B}'$ が σ-集合体の定義の3つの条件を満たすことを示す.

$\Xi \in \mathcal{B}$ で $\xi^{-1}(\Xi) = \Omega \in \mathcal{A}'$. よって $\Xi \in \mathcal{B}'$

$B \in \mathcal{B}'$ とすると. $B \in \mathcal{B}$ で $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}'$. よって. $B^c \in \mathcal{B}$ で

$\xi^{-1}(B^c) = [\xi^{-1}(B)]^c \in \mathcal{A}'$. ゆえに $B^c \in \mathcal{B}'$

最後に. $B_n \in \mathcal{B}'$ とすると. $B_n \in \mathcal{B}$ で $\xi^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}'$. ゆえに $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$

で $\xi^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \xi^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}'$. よって. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}'$. #

② $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$

∵) $B_0 \in \mathcal{B}_0$ とすると. $\mathcal{A}'$ の定義より. $\xi^{-1}(B_0) \in \mathcal{A}'$. よって. $B_0 \in \mathcal{B}'$ #

以上の ①, ② より.

$$\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}'$$

よって. $\forall B \in \mathcal{B}$ に対して

$$\xi^{-1}(B) \in \xi^{-1}(\mathcal{B}) \underset{\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}_0)}{=} \xi^{-1}(\sigma(\mathcal{B}_0)) \underset{\sigma(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}'}{\subset} \xi^{-1}(\mathcal{B}') \underset{\mathcal{B}' \text{の定義}}{\subset} \mathcal{A}'$$

ゆえに. $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}'$. 以上より. (1) が示された.

(2) : (⇒) は明らか.

(⇐) : 仮定より. $\xi^{-1}(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{A}$. よって (1) より

$$\xi^{-1}(\mathcal{B}) = \sigma(\xi^{-1}(\mathcal{B}_0)) \subset \mathcal{A}$$

ゆえに. ξは$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-可測となる □

<u>(1.4) 定義</u> (Borel集合, Borel可測) Sは位相空間, $\xi : \Omega \to S$は写像とする.

(i) <u>Borel σ-集合体</u> (Borel σ-field)

$\mathcal{B}(S)$: Sの開集合全体によって生成されるσ-集合体

$\mathcal{B}(S)$に属する集合を<u>Borel集合</u> (Borel set) という.

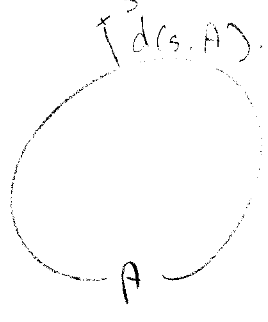
(ii) $\xi : \Omega \to S$が<u>Borel可測</u> (Borel measurable)

$\overset{}{\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}}$ ξは$(\mathcal{A}, \mathcal{B}(S))$-可測.

<u>(1.5) 定理</u> (S, d)は距離空間, $\xi_n : \Omega \to S$はBorel可測写像の列で, 写像$\xi : \Omega \to S$はξ_nの各点収束の極限であるとする. i.e., $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$. このとき$\xi$はBorel可測.

(証明) $s \in S$, $A \subset S$に対して 点sと集合Aとの距離を

$$d(s, A) := \inf\{d(s, t) : t \in A\}$$

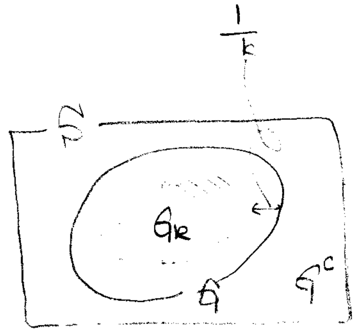


と書く. Borel σ-集合体の定義と命題1.3より, ξが Borel可測であることを示すには, $\forall G$: open subset of Sに対して.

$\xi^{-1}(G)\in\mathcal{A}$ を示せばよい。そこで各 $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$G_k := \{s\in S : d(s, G^c) > \frac{1}{k}\}$$

と置く。



① 各 G_k は open set で $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$.

∵) 写像 $s\in S\mapsto d(s,G^c)$ は（一様）連続なので

G_k は open set となる。

$s\in\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$ とすると、$\exists k_0 ;\ s\in G_{k_0}$ ∴ $d(s,G^c)>\frac{1}{k_0}$

$s\notin G$ とすると、$d(s,G^c)=0$ となり矛盾！ よって、$s\in G$.

逆に、$s\in G$ とする。$^\forall k\in\mathbb{N}$ に対して $s\notin G_k$ とすると、$d(s,G^c)\le\frac{1}{k}$

よって、$k\to\infty$ とすると $d(s,G^c)=0$ ∴ $s\notin G$。これは矛盾。

(G^c が closed set なので)

ゆえに $s\in\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$ #

② $\xi^{-1}(G)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{l=n}^{\infty}\xi_l^{-1}(G_k)$

∵) $\omega\in$(左辺) とすると、$\xi(\omega)\in G=\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$。ゆえに

$\exists k_0\in\mathbb{N} ;\ \xi(\omega)\in G_{k_0}$ ∴ $d(\xi(\omega),G^c)>\frac{1}{k_0}$

写像 $s\in S\mapsto d(s,G^c)$ は連続なので $d(\xi(\omega),G^c)=\lim_{n\to\infty}d(\xi_n(\omega),G^c)$.

∴ $\exists n_0\in\mathbb{N} ;\ l\ge n_0$ ならば $d(\xi_l(\omega),G^c)>\frac{1}{k_0}$ ∴ $\xi_l(\omega)\in G_{k_0}$

以上をまとめると $\exists k_0\in\mathbb{N}, \exists n_0\in\mathbb{N}, l\ge n_0$ ならば $\omega\in\xi_l^{-1}(G_{k_0})$

∴ $\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{l=n}^{\infty}\xi_l^{-1}(G_k)=$ (右辺)

逆に. $\omega \in$ (右辺) とすると.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall j \geq n_0$ に対して. $\xi_j(\omega) \in G_{k_0}$

$$\therefore d(\xi_j(\omega), G^c) > \frac{1}{k_0}$$

再び. 写像 $s \in S \mapsto d(s, G^c)$ の連続性により. $j \to \infty$ とすると.

$$d(\xi(\omega), G^c) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{k_0+1}$$

$$\therefore \xi(\omega) \in G_{k_0+1}$$

以上をまとめると. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\xi(\omega) \in G_{k_0+1}$ $\therefore \xi(\omega) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G$

$\therefore \omega \in \xi^{-1}(G)$ //

今こ. 各 ξ_n は Borel 可測なので. $\forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ に対して. $\xi_j^{-1}(G_k) \in \mathcal{A}$.

よって. ②より. $\xi^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \xi_j^{-1}(G_k) \in \mathcal{A}$. ゆえに ξ は Borel 可測となる □

(反例の構成)

(1.6) 反例　定理1.5 は一般の位相空間では必らずしも成立しない.
$[0,1]$ は通常の Euclid 距離をもつコンパクト距離空間とし. S は. 関数 $f: [0,1] \to [0,1]$ の全体の作る集合に各点収束位相を導入した位相空間とする. このとき. Tychonoff の定理により. S はコンパクト Hausdorff 空間となる.
写像 $\xi_n, \xi: [0,1] \to S$ を

$$\xi_n(t)(u) := \max(1 - n|t-u|, 0), \quad t, u \in [0,1]$$

$$\xi(t)(u) := \begin{cases} 1 & \text{if } t = u \\ 0 & \text{if } t \neq u. \end{cases}$$

で定義する.

① 各 ξ_n は連続, それ故 Borel 可測.

∵) $t_k \to t$ in $[0,1]$ とする. このとき, 各 $u \in [0,1]$ に対して

$$\xi_n(t_k)(u) = \max\left(1 - n|t_k - u|, 0\right) \to \max\left(1 - n|t-u|, 0\right) = \xi_n(t)(u)$$

となる. ゆえに $\xi_n(t_k) \to \xi_n(t)$ in $\mathfrak{S}$. ゆえに連続 #

② $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$ in $\mathfrak{S}$ $(\forall t \in [0,1])$

∵) $\forall t \in [0,1]$ を固定: $u \in [0,1]$ に対して

$t \neq u$ のとき, $\xi_n(t)(u) = \max\left(1 - n|t-u|, 0\right) \to 0$

$t = u$ のとき, $\xi_n(t)(u) = \max(1, 0) = 1$.

よって $\xi_n(t)(u) \to \xi(t)(u)$ となる. ゆえに $\lim_{n\to\infty} \xi_n(t) = \xi(t)$ in $\mathfrak{S}$ #

③ ξ は Borel 可測でない.

∵) 各 $u \in [0,1]$ に対して, $G_u := \{f \in \mathfrak{S} : f(u) > 0\}$ とおくと,

G_u は $\mathfrak{S}$ 上の各点収束位相に関して open set となる.

D を $[0,1]$ の非 Borel 部分集合とする (反例の後の註を見よ).

$G := \bigcup_{u \in D} G_u$ と置くと, G は $\mathfrak{S}$ の開集合である. このとき,

$\xi^{-1}(G) = D$ となる.

$\because$) $t \in$ (左辺) とすると. $\xi(t) \in G = \bigcup_{u \in D} G_u$.

$\therefore \exists u_0 \in D$; $\xi(t) \in G_{u_0}$ $\therefore \xi(t)(u_0) > 0$ $\therefore t = u_0 \in D =$ (右辺)

逆に. $t \in$ (右辺) とすると. $t \in D$ で $\xi(t)(t) = 1 > 0$ $\therefore \xi(t) \in G_t \underset{\substack{\uparrow \\ t \in D \text{故に}}}{\subset} G$

$\therefore t \in \xi^{-1}(G) =$ (左辺)

よって. ξ は Borel 可測 でない.

以上の ①, ②, ③ により 反例が 構成された □

(1.7) 補足 $[0, 1]$ に 非Borel可測部分集合が 存在することは, 次の結果により 保証される.

命題 S は 才2可算公理を 満たす Hausdorff 空間で $\operatorname{card} S = c$ (= 連続の濃度) とすると. $\operatorname{card} \mathcal{B}(S) = c$. それ故. S には 非Borel可測集合が 存在する.

(証明) S の 可算個の集合から成る開基底を $\mathcal{G}_0$ とすると. $\mathcal{B}(S) = \sigma(\mathcal{G}_0)$ である. ここで Halmos[; p.26] により「一般に 集合族 $\mathcal{E}$ に 対し $\operatorname{card} \mathcal{E} \leq c$ ならば $\operatorname{card} \sigma(\mathcal{E}) \leq c$」となるので $\operatorname{card} \mathcal{B}(S) \leq c$ である.

$\therefore c = \operatorname{card} S \leq \operatorname{card} \mathcal{B}(S) \leq c$ $\therefore \operatorname{card} \mathcal{B}(S) = c$.

S のすべての部分集合から成る集合族を $\mathcal{P}(S)$ で表すと. $\operatorname{card} \mathcal{P}(S) = 2^c$ であり, 濃度の性質より $c < 2^c$ なので. $\operatorname{card} \mathcal{B}(S) < \operatorname{card} \mathcal{P}(S)$ となる.

$\therefore \mathcal{B}(S) \subsetneqq \mathcal{P}(S)$. ゆえに、非Borel可測集合が存在する $\square$

§2. Borel集合とBaire集合.

この§では位相空間上の測度の考察を行う場合に、測度の定義域として重要なBorel集合とBaire集合の基本的な性質について述べる.

(2.1) 記号. この§を通じて.

S, T : Hausdorff空間

$\mathfrak{B}(S)$: S の Borel σ-集合体

$C(S)$: S 上で定義された実数値連続関数全体

$C_b(S)$: S 上で定義された実数値有界連続関数全体

$\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 1)$: n 次元Euclid空間

$\mathfrak{P}(\Omega)$: 空でない集合 Ω のすべての部分集合から成る集合族.

$\sigma(\Gamma)$: S 上の実数値関数からなる空でない族 Γ によって生成されるσ-集合体

(2.2) 定義 (cylindrical σ-field, Baire σ-field)

(i) Γ は S 上の実数値関数から成る空でない族.

field of cylinders

$\mathfrak{C}(S,\Gamma)$: 次の形の筒集合 (cylinder set) 全体からなる集合体

$$C = \{s \in S : (f_1(s), \dots, f_n(s)) \in B\}$$

ただし, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in \Gamma$, $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$

cylindrical σ-field

$\hat{\mathcal{C}}(S,\Gamma)$: $\mathcal{C}(S,\Gamma)$によって生成されるσ-集合体

(ii) Baire σ-集合体 (Baire σ-field)

$\mathcal{B}_0(S) := \hat{\mathcal{C}}(S, C(S))$

$\mathcal{B}_0(S)$に属する集合をBaire集合 (Baire set) という.

(2.3) 命題　ΓはS上の実数値関数からなる空でない集合族とする.

(1) $\hat{\mathcal{C}}(S,\Gamma) = \sigma(\Gamma)$

(2) $\mathcal{B}_0(S) = \sigma(C(S)) = \sigma(C_b(S))$

つまり. $\mathcal{B}_0(S)$はS上の実数値(有界)連続関数をすべて可測にする最小のσ-集合体.

(3) $(\Omega, \mathcal{A})$は可測空間, $\xi : \Omega \to S$は写像とする.

- ξが$(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{C}}(S,\Gamma))$-可測

　$\Leftrightarrow$ $\forall f \in \Gamma$に対して. $f \circ \xi$が$(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測

- ξが$(\mathcal{A}, \mathcal{B}_0(S))$-可測.

　$\Leftrightarrow$ $\forall f \in C(S)$ $(\forall f \in C_b(S))$に対して. $f \circ \xi$が$(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測.

(4) $\mathcal{B}_0(S)\subset\mathcal{B}(S)$

(証明) (1): $\sigma(P)$ は P に属する関数をすべて可測にする最小の σ-集合体とする (このような σ-集合体は存在する. 実際 $\mathcal{R}$ は $\{\mathcal{D}:\mathcal{D}$ は P に属する関数をすべて可測にする σ-集合体$\}$ とすると, $\mathcal{R}\ni\mathcal{P}(S)$ なので $\mathcal{R}$ は空でない集合族である. そこで $\sigma(P)$ は $\bigcap_{\mathcal{D}\in\mathcal{R}}\mathcal{D}$ と置けば, これが求める σ-集合体となる)

• <u>$\mathcal{C}(S,P)\subset\sigma(P)$ であること</u>: $f_1,\cdots,f_n\in P$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 各 f_i は $(\sigma(P),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測なので, 写像 $s\in S\mapsto(f_1(s),\cdots,f_n(s))$ は $(\sigma(P),\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$-可測となる. ゆえに,

$$C=\{s\in S:(f_1(s),\cdots,f_n(s))\in B\}\in\sigma(P)$$

となる. よって, $\mathcal{C}(S,P)\subset\sigma(P)$ が得られる.

• <u>$\sigma(P)\subset\mathcal{C}(S,P)$ であること</u>: $f\in P$ とすると, $\mathcal{C}(S,P)$ の定義より, $^\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $f^{-1}(B)\in\mathcal{C}(S,P)$. よって, f は $(\mathcal{C}(S,P),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測である. ここで $\sigma(P)$ は f を可測とする最小の σ-集合体なので $\sigma(P)\subset\mathcal{C}(S,P)$ となる.

(• <u>後半の主張を示す</u>: $\mathcal{D}:=\sigma(\{f^{-1}(B):f\in P,\ B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\})$ とおく. $\sigma(P)$ は P に属する関数を可測にする最小の σ-集合体なので 明らかに $\sigma(P)\subset\mathcal{D}$ が成り立つ. 一方, $f\in P$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して f は $(\sigma(P),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測なので $f^{-1}(B)\in\sigma(P)$. よって $\mathcal{D}\subset\sigma(P)$ となる)

(2) $\sigma(C(S)) = \sigma(C_b(S))$ を示せばよい. $\sigma(C(S)) \supset \sigma(C_b(S))$ は明らかなので $\sigma(C(S)) \subset \sigma(C_b(S))$ を示す. $\sigma(C(S))$ の最小性より, $C(S)$ に属する関数はすべて $(\sigma(C_b(S)), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測となることを示せばよい.

$f \in C(S)$ とし, $f = f^+ - f^-$ $(f^+, f^- \geq 0)$ と分解する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n^+ := \min(f^+, n)$, $f_n^- := \min(f^-, n)$, $f_n := f_n^+ - f_n^-$ と置くと $f_n \in C_b(S)$ で $f_n(s) \to f(s)$ $(\forall s \in S)$ となる. 各 f_n は $(\sigma(C_b(S)), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測なので定理1.5より f は $(\sigma(C_b(S)), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測となる.

(3) 前半の主張を示せば後半は(1),(2)の結果と組み合せて容易に示せる.

($\Longrightarrow$): 各 $f \in \Gamma$ は $(\sigma(\Gamma), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測で (1)より $\mathcal{C}(S, \Gamma) = \sigma(\Gamma)$ だから.

($\Longleftarrow$): $f \in \Gamma$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とすると $\xi^{-1}(f^{-1}(B)) = (f \circ \xi)^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

よって, 命題1.3と(1)より, ξ は $(\Omega, \mathcal{C}(S, \Gamma))$-可測となる.

(4) 連続関数はすべて $(\mathcal{B}(S), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測であり, (1),(2)より, $\mathcal{B}_0(S)$ は $C(S)$ に属する関数をすべて可測にする最小の σ-集合体なので $\mathcal{B}_0(S) \subset \mathcal{B}(S)$ となる □

(2.4) 命題 S は距離空間とする

(1) $F \subset S$ は閉集合とすると $\exists f \in C_b(S);\ F = f^{-1}(\{0\})$

(2) $\mathcal{B}_0(S) = \mathcal{B}(S)$

(証明)(1) $F \subset S$ は閉集合とし, $d(s,F) := \inf\{d(s,t) : t \in F\}$ $(s \in S)$ とおく.

$$f(s) := \frac{d(s,F)}{1+d(s,F)} \quad (s \in S)$$

と置くと, $f \in C_b(S)$ で $f(s)=0 \Leftrightarrow d(s,F)=0 \Leftrightarrow s \in F$ $\therefore F = f^{-1}(\{0\})$.

(2) $F \subset S$ は閉集合とすると, (1)より

$\exists f \in C_b(S)$; $F = f^{-1}(\{0\}) \in \sigma(C_b(S)) = \mathcal{B}_0(S)$.

よって. $\mathcal{B}(S) \subset \mathcal{B}_0(S)$. 一方, 命題2.3(4)より, $\mathcal{B}_0(S) \subset \mathcal{B}(S)$

$\therefore \mathcal{B}_0(S) = \mathcal{B}(S)$ □

(反例の構成)

(2.5) 反例. 命題2.4の(2)は一般の位相空間では不成立.

反例1.6より 次のような空間 S と写像 $\xi_n, \xi : [0,1] \to S$ $(n \geq 1)$ が存在する:

(i) S はコンパクトHausdorff空間

(ii) ξ_n は連続写像で $\xi(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t)$ for $\forall t \in [0,1]$

(iii) ξ は $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(S))$-可測でない.

このとき, ξ は $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}_0(S))$-可測.

$\because$) 各 $f \in C(S)$ に対し, $f \circ \xi_n$ は連続なので $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測で,

f の連続性より $f \circ \xi(t) = \lim_{n\to\infty} f \circ \xi_n(t)$ $(\forall t \in [0,1])$. よって 命題1.5より

$f \circ \xi$ は $(\mathcal{B}([0,1]), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-可測. ゆえに 命題2.3(3)より, ξ は

$(\mathfrak{B}([0,1]), \mathfrak{B}_0(\Xi))$-可測 #

よって ξ は $(\mathfrak{B}([0,1]), \mathfrak{B}(\Xi))$-可測でないので

$\exists B \in \mathfrak{B}(\Xi)\,;\ \xi^{-1}(B) \notin \mathfrak{B}([0,1])$

$B \in \mathfrak{B}_0(\Xi)$ と仮定すると. ξ が $(\mathfrak{B}([0,1]), \mathfrak{B}_0(\Xi))$-可測であることから.

$\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{B}([0,1])$ となり矛盾! よって $B \notin \mathfrak{B}_0(\Xi)$. 以上で反例が

構成できた □

§3. 直積空間のBorel σ-集合体.

この§では. 直積空間のBorel σ-集合体の直積σ-集合体との間の関係について調べる.

<u>(3.1) 命題</u> $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は Hausdorff空間の族とし, $S := \prod_{\alpha\in\Gamma} S_\alpha$ をその直積位相空間とする.

(1). $\prod_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{B}(S_\alpha) \subset \mathcal{B}(S)$.

(2) Γは高々可算集合で 各S_αが 可算個の集合から成る開基底をもてば

$$\mathcal{B}(S)=\prod_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{B}(S_\alpha).$$

(証明) (1) 各$\alpha\in\Gamma$に対して. S_α上への射影 $\pi_\alpha : S\to S_\alpha$ は連続なので $(\mathcal{B}(S),\mathcal{B}(S_\alpha))$-可測である. ここで $\prod_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{B}(S_\alpha)$ はすべての射影 π_α を $\mathcal{B}(S_\alpha)$ に関して可測にする S上の最小のσ-集合体なので $\prod_{\alpha\in\Gamma}\mathcal{B}(S_\alpha)\subset\mathcal{B}(S)$ となる.

(2) 各$\alpha\in\Gamma$に対して. $\mathcal{G}_\alpha$を. 可算個の集合からなるS_αの開基底とする. このとき,

次の形の集合

$$\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha),\quad G_\alpha\in\mathcal{G}_\alpha,\quad \alpha\in\Gamma$$

の有限積は,

$$U=\prod_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha,\ \text{各}\,U_\alpha\in\mathcal{G}_\alpha,\ \text{有限個の}\,\alpha\in\Gamma\,\text{を除いて}\,U_\alpha=S_\alpha$$

という形をしているので. 直積位相の定義より. これらの全体の作る集合族 $\mathcal{U}$ は

Sの直積位相に関する開基底となる。ここで仮定より、Pは高々可算なので、$\mathcal{D}$も高々可算な集合からなる。また、各π_αは$\left(\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha), \mathcal{B}(S_\alpha)\right)$-可測なので、$\mathcal{D}\subset\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha)$。さらに、$S$の任意の開集合は$\mathcal{D}$に属する集合の可算個の和集合として表されるので、$\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha)$は$S$のすべての開集合を含む。よって、$\mathcal{B}(S)\subset\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha)$。一方、(1)より、$\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha)\subset\mathcal{B}(S)$。ゆえに、$\mathcal{B}(S)=\prod_{\alpha\in P}\mathcal{B}(S_\alpha)$が成り立つ。□

命題3.1 (2) の仮定の条件は少しゆるめることができる：

(3.2) 命題 Hausdorff空間S, Tのどちらか一方が可算個の集合からなる開基底をもつならば $\mathcal{B}(S)\times\mathcal{B}(T)=\mathcal{B}(S\times T)$.

(証明) $\mathcal{G}$をSの可算開基底、$\mathcal{H}$をTの開基底とすると、直積位相の定義より$\{G\times H : G\in\mathcal{G}, H\in\mathcal{H}\}$は$S\times T$の開基底となる。

W : open subset of $S\times T$ とする。このとき、

$$W=\bigcup_{\alpha\in P}(G_\alpha\times H_\alpha),\quad 各G_\alpha\in\mathcal{G},\ H_\alpha\in\mathcal{H}$$

と表される。ここで$\{G_\alpha\}_{\alpha\in P}$の中に異なるものは可算個しかないので、それらを$G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots$とする。このとき、

$P_1:=\{\alpha\in P : G_\alpha=G_{\alpha_1}\}$, $P_2:=\{\alpha\in P : G_\alpha=G_{\alpha_2}\}, \dots$と置くと、$\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$は互いに素で$\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k=P$となる。さらに

$$W = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(G_\alpha \times H_\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Gamma_k}(G_\alpha\times H_\alpha) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\Gamma_k}(G_{\alpha_k}\times H_\alpha)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty}\Big\{ G_{\alpha_k} \times \underbrace{\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma_k} H_\alpha\Big)}_{T\text{の open set}} \Big\} \in \mathcal{B}(S)\times\mathcal{B}(T)$$

以上より, $\mathcal{B}(S\times T)\subset\mathcal{B}(S)\times\mathcal{B}(T)$ となり, 証明が完了した □

(3.3) 反例. 命題3.1(2)は一般の位相空間では不成立. より詳しく言えば, Hausdorff空間 S が $\mathrm{card}\, S > c$ を満たせば,

$\Delta := \{(s,s) : s \in S\} \notin \mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S)$. それゆえ

$$\mathcal{B}(S) \times \mathcal{B}(S) \neq \mathcal{B}(S \times S)$$

さらに S が距離空間ならば

$$\mathcal{B}_0(S) \times \mathcal{B}_0(S) \neq \mathcal{B}_0(S \times S)$$

(反例の構成) 以下で順を追って反例を構成する.

(準備) Q は空でない集合, $\mathcal{P}(Q)$ は Q のすべての部分集合からなる集合族とする. $\mathrm{card}\, Q > c$ ならば $\Delta := \{(x,x) : x \in Q\} \notin \mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q)$.

∵) $\mathcal{E} := \left\{ E \subset Q \times Q : \begin{array}{l} E \text{ 及び } E^c \text{ は共に } Q \times Q \text{ の長方形の高々} \\ \text{連続濃度の和集合として表せる} \end{array} \right\}$

① $\mathcal{E}$ は $Q \times Q$ の長方形をすべて含む σ-集合体. それゆえ $\mathcal{P}(Q) \times \mathcal{P}(Q) \subset \mathcal{E}$

∵) $\mathcal{E}$ が $Q \times Q$ の長方形をすべて含むことは明らか.

σ-集合体であること:

- $E = \phi \times \phi$ とすると $E^c = Q \times Q$. よって, E 及び E^c は共に $Q \times Q$ の長方形なので $E = \phi \times \phi \in \mathcal{E}$
- $E \in \mathcal{E}$ のとき, $E^c \in \mathcal{E}$ となることは $\mathcal{E}$ の定義より明らか.
- $E_n \in \mathcal{E}$ $(n \geq 1)$ とすると.

$$\begin{cases} E_n = \bigcup_{\alpha \in \Delta_n} H_\alpha^{(n)} \\ E_n^c = \bigcup_{\beta \in \Gamma_n} I_\beta^{(n)} \end{cases} \quad (各 H_\alpha^{(n)}, I_\beta^{(n)} は \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} の長方形)$$

と表される．このとき，

$$\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{\alpha \in \Delta_n} H_\alpha^{(n)} = \bigcup_{(\alpha,k)\in \bigcup_{n=1}^\infty (\Delta_n \times \{n\})} H_\alpha^{(k)}$$

と表せる

∵) 右側の等号を示す：$(u,v) \in$ (左辺) とすると．

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \alpha_0 \in \Delta_{n_0} ; (u,v) \in H_{\alpha_0}^{(n_0)}$．このとき $(\alpha_0, n_0) \in \Delta_{n_0} \times \{n_0\}$

$\therefore (\alpha_0, n_0) \in \bigcup_{n=1}^\infty (\Delta_n \times \{n\}) \quad \therefore (u,v) \in \bigcup_{(\alpha,k)\in \bigcup_{n=1}^\infty (\Delta_n \times \{n\})} H_\alpha^{(k)} =$ (右辺)

逆に，$(u,v) \in$ (右辺) とすると，$\exists (\alpha_0, k_0) \in \bigcup_{n=1}^\infty (\Delta_n \times \{n\}) ; (u,v) \in H_{\alpha_0}^{(k_0)}$．

このとき，$\exists n_0 \in \mathbb{N} ; (\alpha_0, k_0) \in \Delta_{n_0} \times \{n_0\}$．よって，$k_0 = n_0$ で，$\alpha_0 \in \Delta_{n_0}$

$\therefore (u,v) \in H_{\alpha_0}^{(n_0)}$．以上をまとめると，$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \alpha_0 \in \Delta_{n_0} ;$

$(u,v) \in H_{\alpha_0}^{(n_0)} \quad \therefore (u,v) \in \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{\alpha \in \Delta_n} H_\alpha^{(n)} =$ (左辺) #

ここで $\mathrm{card}(\Delta_n) \leq c$ なので，$\mathrm{card}(\Delta_n \times \{n\}) \leq c$．さらに，$\{\Delta_n \times \{n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

互いに素なので $\mathrm{card}\left(\bigcup_{n=1}^\infty (\Delta_n \times \{n\})\right) \leqq \mathrm{card}\,\mathbb{N} \cdot c = c$ となる，よって，

$\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の長方形の高々連続な濃度の和として表される．

次に

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty E_n^c = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{\beta\in\Gamma_n} I_\beta^{(n)} = \bigcup_{\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)\in \prod_{n=1}^\infty \Gamma_n} \left(\bigcap_{n=1}^\infty I_{\sigma_n}^{(n)}\right)$$

と書かれる．

∵) 最後の等号を示す：$(u,v)\in$(左辺)とすると，$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists \beta_n\in\Gamma_n$; $(u,v)\in I^{(n)}_{\beta_n}$．そこで $\sigma=(\beta_1,\beta_2,\cdots)$と置くと，$\sigma\in\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$ で，$\forall n\in\mathbb{N}$に対して，$(u,v)\in I^{(n)}_{\beta_n}$ $\therefore (u,v)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}_{\beta_n}$．以上をまとめると，

$\exists\sigma=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$; $(u,v)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}_{\beta_n}$．よって，$(u,v)\in$(右辺)．

また，$(u,v)\in$(右辺)とすると，$\exists\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)\in\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$; $(u,v)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}_{\sigma_n}$．

よって，各$k\in\mathbb{N}$に対して，$\beta_k:=\sigma_k$と置くと，$\beta_k\in\Gamma_k$で，$(u,v)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}_{\beta_n}$．

それゆえ，$(u,v)\in I^{(k)}_{\beta_k}$となる．以上をまとめると，$\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists\beta_k\in\Gamma_k$;

$(u,v)\in I^{(k)}_{\beta_k}$． $\therefore (u,v)\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{\beta\in\Gamma_k}I^{(k)}_{\beta}=$(右辺) #

ここで各 $I^{(n)}_{\sigma_n}$ は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の長方形なので $\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}_{\sigma_n}$ も $\phi\times\phi$ または $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の長方形となる．

そして，$\mathrm{card}\,\Gamma_n\leq c$ なので，$\mathrm{card}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma_n\right)\leq\mathrm{card}\left(\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}\right)=\mathrm{card}(\mathbb{N})\cdot c=c$．

ゆえに，$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)^c$ も $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の長方形の高々連続な濃度の和として表かれる

以上より，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{E}$．よって，$\mathcal{E}$がσ-集合体であることが示された．ここで $\mathfrak{B}(\mathbb{Q})\times\mathfrak{B}(\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の長方形をすべて含む最小のσ-集合体なので，

$\mathfrak{B}(\mathbb{Q})\times\mathfrak{B}(\mathbb{Q})\subset\mathcal{E}$ となる #

② $\Delta\notin\mathcal{E}$

∵) $\Delta\in\mathcal{E}$ とすると，$\Delta=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha$，各$H_\alpha$は $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ の空でない長方形で

card $\Lambda \leq c$ と表される．このとき，$H_\alpha \subset \Delta$ であり H_α は空でない長方形なので

H_α は 1 点集合である．よって，

$$\mathrm{card}\,\Delta = \mathrm{card}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} H_\alpha\right) \leq \mathrm{card}\,\Lambda \leq c$$

一方，写像 $x \in \mathbb{Q} \mapsto (x, x) \in \Delta$ は 1 対 1 なので

$$c < \mathrm{card}\,\mathbb{Q} \leq \mathrm{card}\,\Delta$$

これは矛盾．ゆえに $\Delta \notin \mathcal{E}$．

よって，①，② より，$\Delta \notin \mathfrak{B}(\mathbb{Q}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{Q})$．#

(#1 段)より，$\Delta = \{(s, s) : s \in \mathbb{S}\} \notin \mathfrak{B}(\mathbb{S}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{S})$．よって，

$\Delta \notin \mathfrak{B}(\mathbb{S}) \times \mathfrak{B}(\mathbb{S})$．ところが Δ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の閉集合なので $\Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{S} \times \mathbb{S})$．

以上で求める反例が構成できた □

§4 位相空間上の測度の正則性

この§では位相空間上の測度に対して"正則性"の概念を導入し，それらの基本的性質を調べる．後の§で明らかになるように，ここで定義する"正則性"の概念は ① Borel測度が開(閉)集合における値だけによって一意的に定まることや，② 測度とこれによって定義される有界線形汎関数の間の1対1対応 (Riesz-Markov-Kakutaniの定理) を確立する際に決定的な役割を果たす．

<u>(4.1) 記号</u>．この§を通じて

S：位相空間

$\mathfrak{B}(S)$：SのBorel σ-集合体

$\mathfrak{B}_0(S)$：SのBaire σ-集合体

<u>(4.2) 定義</u>

(i) $\mathfrak{B}(S)$を定義域とする測度のことを，S上の<u>Borel測度</u>という

(ii) $\mathfrak{B}_0(S)$を定義域とする測度のことをS上の<u>Baire測度</u>という

以下では，Borel測度に対していくつかの"正則性"の概念を定義する．

(4.3) 定義. μ は S 上の Borel 測度とする.

(i) μ が <u>正則</u> (regular) $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B ; F \text{ は closed}\}$$

(ii) μ が <u>Radon</u> $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B ; K \text{ は compact}\}$$

(iii) μ が <u>τ-正則</u> (τ-smooth)

$\underset{\text{def.}}{\iff}$ S の開集合からなる任意の単調増大列 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ に対して

$$\mu\Big(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha\Big) = \lim_{\alpha \in \Gamma} \mu(G_\alpha) \ \Big(= \sup_{\alpha \in \Gamma} \mu(G_\alpha)\Big)$$

(iv) μ が <u>緊密</u> (tight) $\underset{\text{def.}}{\iff}$ $^\forall \varepsilon > 0$, $^\exists K_\varepsilon$: compact ; $\mu(S - K_\varepsilon) < \varepsilon$

次の命題の証明はすべて容易なので省略する:

(4.4) 命題 μ は S 上の Borel 測度とする.

(1) μ が正則 $\iff$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$ に対して

$$\mu(B) = \inf\{\mu(G) : B \subset G ; G \text{ は open}\}$$

$\iff$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$, $^\forall \varepsilon > 0$ に対して, $^\exists F_\varepsilon$: closed,

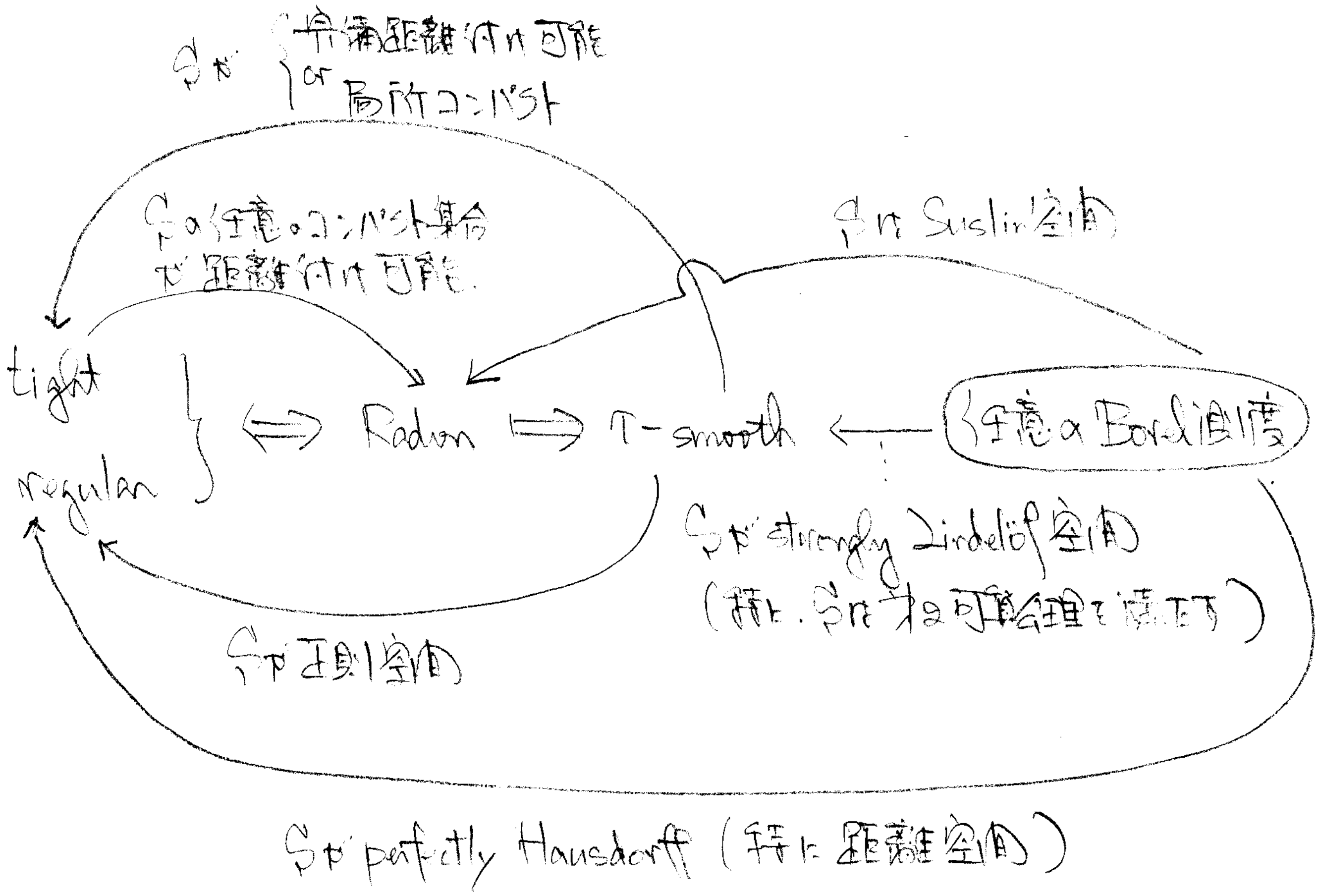
$^\exists G_\varepsilon$: open ; $F_\varepsilon \subset B \subset G_\varepsilon$ かつ $\mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$

(2) μ が Radon $\iff$ $^\forall B \in \mathcal{B}(S)$, $^\forall \varepsilon > 0$ に対して, $^\exists K_\varepsilon$: compact,

$\exists A_\varepsilon$: open ; $K_\varepsilon \subset B \subset A_\varepsilon$ かつ $\mu(A_\varepsilon - K_\varepsilon) < \varepsilon$

(3) μ が τ-正則 $\iff$ S の閉部分集合から成る単調減少 net $\{F_\alpha\}_{\alpha \in P}$ に対して、$\mu\left(\bigcap_{\alpha \in P} F_\alpha\right) = \lim_{\alpha \in P} \mu(F_\alpha)$ $\left(= \inf_{\alpha \in P} \mu(F_\alpha)\right)$

上記で定義した"正則性"の間には、以下の関係が成り立つ：



特に

- S が局所コンパクトの場合、Radon = τ-smooth
- S が完備距離付け可能な空間の場合、Radon = τ-smooth

以下で、上図の主張を順に証明していく。

<u>(4.5) 命題</u>　Radon $\Leftrightarrow$ tight かつ regular

(証明) ($\Rightarrow$) μ は明らかに tight. $B \in \beta(S)$ とする. Hausdorff 空間では. コンパクト集合は閉集合なので

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B ; K \text{は compact}\} \quad \leftarrow \mu \text{は Radon ゆえ.}$$

$$\leq \sup\{\mu(F) : F \subset B ; F \text{は closed}\}$$

$$\leq \mu(B)$$

$\therefore\ \mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B ; F \text{は closed}\}$. よって μ は regular

($\Leftarrow$) $\varepsilon > 0$, $B \in \beta(S)$ とする. μ は tight なので

$$\exists K_\varepsilon : \text{compact} ;\ \mu(K_\varepsilon) \geq \mu(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

とできる. 一方, μ は regular でもあるので

$$\exists F_\varepsilon : \text{closed} ;\ F_\varepsilon \subset B \text{ かつ } \mu(B) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \mu(F_\varepsilon)$$

とできる. そこで. $D_\varepsilon := F_\varepsilon \cap K_\varepsilon$ と置くと. D_ε は. コンパクト集合の閉部分集合なので. S のコンパクト集合であり. $D_\varepsilon \subset B$ となる. さらに.

$$\mu(S) - \mu(D_\varepsilon) = \mu(S) - \mu(F_\varepsilon \cap K_\varepsilon)$$

$$= \mu(F_\varepsilon^c \cup K_\varepsilon^c)$$

$$\leq \mu(F_\varepsilon^c) + \mu(K_\varepsilon^c)$$

$$= 2\mu(G) - \mu(F_\varepsilon) - \mu(K_\varepsilon)$$

$$\leq 2\mu(G) - \left(\mu(B) - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\mu(G) - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= \mu(G) - \mu(B) + \varepsilon$$

$\therefore\ \mu(B) \leq \mu(D_\varepsilon) + \varepsilon$ 故に μ は Radon □

<u>(4.6) 命題</u> Radon $\Rightarrow$ τ-smooth

(証明) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は G_α open set から成る単調増大 net で、$G := \bigcup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha$ と置く。$\forall\varepsilon>0$ をとり固定：μ は Radon なので

$\exists K_\varepsilon$: compact ; $K_\varepsilon \subset G$ かつ $\mu(G) - \mu(K_\varepsilon) < \varepsilon$

とできる。ここで K_ε は compact で $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は単調増大 net なので

$\exists\alpha_0\in\Gamma$; $\alpha \geqq \alpha_0$ ならば $K_\varepsilon \subset G_{\alpha_0} \subset G_\alpha \subset G$

とできる。よって $\alpha \geqq \alpha_0$ のとき

$$0 \leq \mu(G) - \mu(G_\alpha) = \mu(G - G_\alpha) \leq \mu(G - K_\varepsilon) = \mu(G) - \mu(K_\varepsilon) < \varepsilon$$

故に $\lim_{\alpha\in\Gamma} \mu(G_\alpha) = \mu(G)$。よって μ は τ-smooth である □

<u>(4.7) 命題</u> S が正則空間 (i.e., 点とそれを含まない閉集合は開集合で分離される) のとき、τ-smooth $\Rightarrow$ regular

(証明) $\mathcal{F} := \{B \in \mathcal{B}(S) : \mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B$ で F は closed$\}\}$

とおくと、$\mathcal{F}$ は σ-集合体である。

∵) • $\phi \in \mathfrak{F}$ は明らか

• $B \in \mathfrak{F}$ とすると. $\forall \varepsilon > 0$ に対して. $\exists F_\varepsilon$: closed, $\exists G_\varepsilon$: open ; $F_\varepsilon \subset B \subset G_\varepsilon$ で

$\mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$. このとき. G_ε^c は closed で $G_\varepsilon^c \subset B^c$ であり.

$$\mu(B^c - G_\varepsilon^c) = \mu(G_\varepsilon - B) \leq \mu(G_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$$

よって. $B^c \in \mathfrak{F}$.

• $B_n \in \mathfrak{F}\ (n=1,2,\cdots)$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ を固定 : $\exists F_n$: closed ; $F_n \subset B_n$ かつ

$\mu(B_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. ここで. $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ と置くと. μ の単調列の連続性

により. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\mu(F - \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. ここで $F_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{n_0} F_n$ とおくと

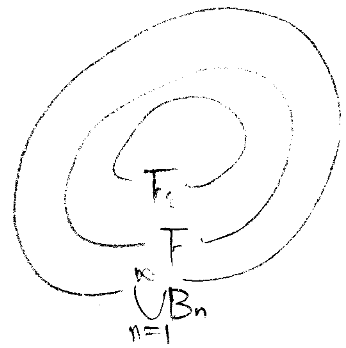
F_ε は closed で $F_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ であり.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - F_\varepsilon\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n - F\right) + \mu(F - F_\varepsilon)$$

$$< \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n - F_n)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n - F_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$



よって. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{F}$ //

注2. G は open subset of S とする. S は正則なので

$$G = \bigcup \{H : H \text{ は open で } \overline{H} \subset G\}$$

となる. (実際には. この条件は S が正則であることと同値である).

ここで $\mathcal{A} := \{H : H \text{ は open で } \overline{H} \subset G\}$ とおいて. $\mathcal{A}$ の中に 集合の包含

関係で順序を導入すると、$\mathcal{H}$ 自身が上に有向な半順序集合 (directed set) となる。よって、$\{H\}_{H\in\mathcal{H}}$ は S の開集合からなる単調増大 net であるので、

μ の τ-正則性より、

$$\mu(G)=\mu\Big(\bigcup_{H\in\mathcal{H}}H\Big)=\sup_{H\in\mathcal{H}}\mu(H)=\sup\{\mu(H):H \text{ は open で } \overline{H}\subset G\}$$
$$\leq \sup\{\mu(\overline{H}):H \text{ は open で } \overline{H}\subset G\}$$
$$\leq \sup\{\mu(F):F \text{ は closed で } F\subset G\}\leq \mu(G)$$

$\therefore\ \mu(G)=\sup\{\mu(F):F\subset G \text{ で } F \text{ は closed}\}$ $\therefore\ \mu$ は regular □

(4.8) 命題 S が perfectly Hausdorff, i.e., S の任意の閉集合が G_δ-集合であるならば、S 上の任意の Borel 測度は regular.

(証明) μ は S 上の Borel 測度とし、

$$\mathcal{F}:=\{B\in\mathcal{B}(S):\mu(B)=\sup\{\mu(F):F\subset B \text{ で } F \text{ は closed}\}\}$$

と置くと命題4.7の証明より $\mathcal{F}$ は σ-集合体である。よって、$\mathcal{F}$ が S のすべての閉集合を含むことを示せばよい。

$F\subset S$ を閉集合とすると、仮定より、$\exists G_n$: S の open sets ; $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ と書ける。このとき、$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調減少と仮定してよい。このとき、μ の単調減少列に対する連続性より、$\mu(F)=\lim_{n\to\infty}\mu(G_n)$. それ故、$\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$;

$\mu(G_{n_0})-\mu(F)<\varepsilon$ かつ $G_{n_0}\supset F$ となる。よって

$$\mu(F) = \inf\{\mu(G) : F \subset G \text{ で } G \text{ は open}\}$$

よって, 命題4.4 (1)より, $F \in \mathcal{F}$ となり, 証明が完了した □

(4.9) 命題. S の任意のコンパクト集合が距離付け可能ならば,

tight ⇒ Radon.

(証明) μ を S 上の tight な Borel 測度とすると, $\exists \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$: compact 集合の増加列 ; $\mu(S - K_n) < \frac{1}{n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とできる. そこで, μ の K_n 上への制限を

$$\mu_n(A) := \mu(A), \quad A \in \mathcal{B}(K_n) = \{B \in \mathcal{B}(S) : B \subset K_n\}$$

Parthasarathy [; p.5] を見よ.

で定義すると, μ_n は コンパクト距離空間上の Borel 測度なので 命題4.8 より regular. それゆえ Radon となる. そこで $\forall B \in \mathcal{B}(S)$ をとり固定:

このとき, $B \cap K_n \in \mathcal{B}(S)$ で, 各 μ_n は Radon なので

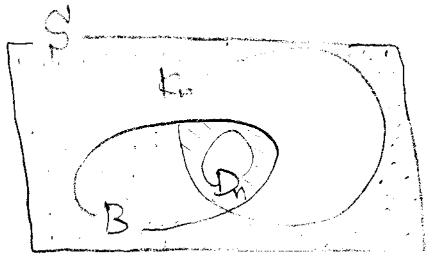
$\exists D_n$: compact subset of K_n ; $D_n \subset B \cap K_n$ かつ

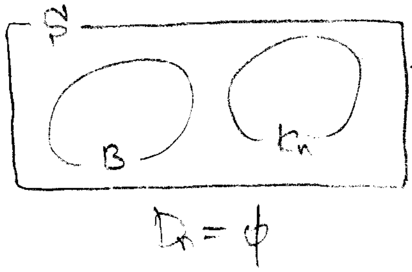
$$\mu(B \cap K_n) - \frac{1}{n} < \mu(D_n)$$

とできる. このとき, 右の Venn 図により

$$\{B \cap K_n - D_n\} \cup (S - K_n) \supset B - D_n$$

が成立つ. よって





$D_n = \phi$

$$\mu(B-D_n) \le \mu(B\cap K_n - D_n) + \mu(S - K_n)$$
$$= \mu(B\cap K_n) - \mu(D_n) + \frac{1}{n}$$
$$= \mu_n(B\cap K_n) - \mu_n(D_n) + \frac{1}{n} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$

ゆえに、$\forall \varepsilon > 0$ に対して n を十分大きくとれば $\mu(B-D_n) < \varepsilon$ となる。

ここで、$D_n \subset B\cap K_n \subset B$ であり、D_n は S のコンパクト集合である。

$\because$) $D_n \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$（各 G_α は S の open set）とすると、

$$D_n = D_n \cap K_n \subset \bigcup [G_\alpha \cap K_n].$$

ここで、D_n は、K_n 上の相対位相に関してコンパクトであり、各 $G_\alpha \cap K_n$ はその相対位相に関して open set なので

$$D_n \subset \bigcup_{i=1}^{n} [G_{\alpha_i} \cap K_n] \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

となる。so、D_n は S のコンパクト集合になっている。以上より μ が Radon であることが示された $\square$

(4.10) 命題. S が strongly Lindelöf 空間（i.e., S の任意の開集合の任意の開被覆が可算部分被覆をもつ）ならば、任意の Borel 測度は τ-smooth.

(証明) $\{G_\alpha\}_{\alpha\in P}$ は S の開集合からなる単調増大ネットで $\bigcup_{\alpha\in P} G_\alpha = G$ とする。仮定より S は strongly Lindelöf 空間なので、$\{G_\alpha\}_{\alpha\in P}$ の可算部分族 $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が存在して、$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{\alpha_i}$ とできる。

$\forall \varepsilon > 0$ を固定: このとき μ の単調増加列的連続性により, 十分大きな n_0 に対して $\mu(G) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n_0} G_{\alpha_i}) < \varepsilon$ とできる. ところが Γ は有向集合なので

$\exists \beta_0 \in \Gamma$; $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_0} \leq \beta_0$

とできるので, $\alpha \geq \beta_0$ のとき. $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ の単調増大性より

$$\bigcup_{i=1}^{n_0} G_{\alpha_i} \subset G_{\beta_0} \subset G_\alpha$$

となる. よって. $\alpha \geq \beta_0$ ならば

$$\mu(G) - \mu(G_\alpha) \leq \mu(G) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n_0} G_{\alpha_i}) < \varepsilon$$

となる. ゆえに $\lim_{\alpha\in\Gamma} \mu(G_\alpha) = \mu(G)$ となり, μ が τ-smooth であることが示された □

(4.11) 命題 S が局所コンパクトならば. τ-smooth $\Longrightarrow$ tight. それゆえ Radon

(証明) $\mathcal{H} := \{G : G$ は open で $\overline{G}$ は compact$\}$ とおくと.

① $\mathcal{H}$ は空でない開集合族

∵) $S \neq \phi$ で局所コンパクトなので, $\exists s_0 \in S$, $\exists V$: s_0 のコンパクトな近傍.

V は s_0 の近傍なので $\exists G_0$: open set ; $s_0 \in G_0 \subset V$ ∴ $\overline{G_0} \subset \overline{V}$.

V はコンパクトなので $\overline{G_0}$ も compact ∴ $G_0 \in \mathcal{H}$. ゆえに $\mathcal{H}$ は空でない #

② $\mathcal{H}$ に通常の包含関係で大小関係を導入すると. $\mathcal{H}$ 自身が上に有向な半順序集合となる. それゆえ. $\{H\}_{H\in\mathcal{H}}$ は S の開集合からなる単調増大

net である

∵) $\mathcal{H}$ が上に有向であること. $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ とし, $H_3 = H_1 \cup H_2$ とおくと.

H_3 は open set で $\overline{H_3} = \overline{H_1} \cup \overline{H_2}$ なので $\overline{H_3}$ は compact. よって. $H_3 \in \mathcal{H}$ で.

$H_1, H_2 \subset H_3$. ゆえに $\mathcal{H}$ は上に有向 #

他の主張は明らか #

③ $S = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$

∵) $s \in S$ とする. S は局所コンパクトなので

$\exists G$: open set ; $s \in G$, $\overline{G}$ は compact

とできる. ここで $G \in \mathcal{H}$ なので $s \in$ (右辺) #

以上の②, ③と μ の T-正則性より $\mu(S) = \lim_{H \in \mathcal{H}} \mu(H)$.

よって. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists H_0 \in \mathcal{H}$; $\mu(S) - \mu(H_0) < \varepsilon$. ここで $\overline{H_0}$ は compact で

あり.

$$\mu(S) - \mu(\overline{H_0}) \leq \mu(S) - \mu(H_0) < \varepsilon$$

よって. μ は tight.

さて. 任意の局所コンパクト (Hausdorff) 空間は正則なので. 命題3.7より

μ は regular. よって. 命題3.5より μ は Radon となる　□

<u>(4.12) 命題</u> Sが完備に距離付け可能 (i.e. S上に距離dが存在して. Sの位相とdによる距離位相が一致する) ならば. τ-smooth $\Rightarrow$ tight, それゆえ. Radonである.

(証明) 仮定より Sはある完備距離空間と位相同型で. τ-正則, tight, regular, Radonなどの性質は. 位相的性質なので. S自身が距離dをもつ完備距離空間と仮定してよい.

μはS上のτ-正則なBorel測度とする. Sの有限部分集合から成る族を$\mathcal{F}$とすると. $\mathcal{F}$は通常の集合の包含関係により上に有向な半順序集合となる.

各$n \in \mathbb{N}$, $s \in S$, $F \in \mathcal{F}$に対して

$$B(s, \tfrac{1}{n}) := \{t \in S : d(s,t) < \tfrac{1}{n}\},$$

$$\overline{B}(s, \tfrac{1}{n}) := \{t \in S : d(s,t) \le \tfrac{1}{n}\}$$

$$G_{F,n} := \bigcup_{s \in F} B(s, \tfrac{1}{n})$$

と置く.

① 各$n \in \mathbb{N}$に対して. $\{G_{F,n}\}_{F \in \mathcal{F}}$は$S$の開集合から成る単調増大netで

$$S = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} G_{F,n}$$

$\because$) 明らかに. $\{G_{F,n}\}_{F \in \mathcal{F}}$は$S$の開集合から成る単調増大netである.

$s \in \mathfrak{S}$ とする. このとき. $F = \{s\} \in \mathfrak{F}$ と置くと. $s \in G_{F,m}$

$\therefore s \in$ (右辺) #

仮定より. μ は τ-smooth なので. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\mu(\mathfrak{S}) = \lim_{F \in \mathfrak{F}} \mu(G_{F,m})$$

ここで $\forall \varepsilon > 0$ をとり固定: このとき. 上式より 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\exists F_{\varepsilon,m} \in \mathfrak{F} \ ; \quad \mu(\mathfrak{S}) - \mu(G_{F_{\varepsilon,m}}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

とできる. それゆえ.

$$\mu(\mathfrak{S}) - \mu\left(\bigcup_{s \in F_{\varepsilon,m}} \overline{B}(s, \tfrac{1}{n})\right) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

ここで

$$K_\varepsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in F_{\varepsilon,m}} \overline{B}(s, \tfrac{1}{n})$$

と置くと.

$$\mathfrak{S} - K_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \mathfrak{S} - \bigcup_{s \in F_{\varepsilon,m}} \overline{B}(s, \tfrac{1}{n}) \right\}$$

$$\therefore \mu(\mathfrak{S} - K_\varepsilon) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \mathfrak{S} - \bigcup_{s \in F_{\varepsilon,n}} \overline{B}(s, \tfrac{1}{n}) \right\}\right)$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(\mathfrak{S} - \bigcup_{s \in F_{\varepsilon,m}} \overline{B}(s, \tfrac{1}{n})\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

となる. このとき.

② K_ε は compact

∵) (S,d) は完備距離空間で，K_ε は closed なので，K_ε が全有界

i.e., $\forall \delta>0$, $\exists$ 有限集合 $M_\delta \subset S$ (M_δ は必らずしも K_ε の要素でなくてもよい)；

$K_\varepsilon \subset \bigcup_{s\in M_\delta} B(s,\delta)$ となることを示せばよい (Billingsley [; p.217] を見よ)．

<u>K_ε が全有界であること：</u> $\forall \delta>0$ を固定：$\frac{1}{n_0}<\delta$ なる $n_0\in\mathbb{N}$ を選ぶ．

このとき，F_{ε,n_0} は有限集合で

$$K_\varepsilon \subset \bigcup_{s\in F_{\varepsilon,n_0}} \overline{B}(s,\tfrac{1}{n_0}) \subset \bigcup_{s\in F_{\varepsilon,n_0}} B(s,\delta)$$

となる．ゆえに K_ε は全有界 $\#$

以上により，μ が tight であることが示された．

さて，距離付け可能な空間はすべて正則なので，命題 3.7 より μ は regular である．よって命題 3.5 より，μ は Radon となる □

<u>(4.13) 命題</u>． S が Polish 空間 (i.e., S は完備可分に距離付け可能な Hausdorff 空間) ならば，S 上の任意の Borel 測度は Radon．

(証明) μ は S 上の Borel 測度とする．可分に距離付け可能な空間は第二可算公理を満たすので，strongly Lindelöf 空間である．よって命題 3.10 より μ は τ-smooth．ゆえに前命題より μ は Radon となる

(直接的証明) 命題3.12と同じ理由で (S, d) は完備可分距離空間と仮定してよい. $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ を可算稠密集合とする. $\forall \varepsilon > 0$ を固定:

このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} B(s_m, \frac{1}{n})$ が成り立つので, μ の単調増加列的連続性より

$$\exists m(n) \in \mathbb{N} ; \quad \mu(S) - \mu\left(\bigcup_{m=1}^{m(n)} B(s_m, \tfrac{1}{n})\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

とできる. そこで

$$K_\varepsilon := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{m(n)} \overline{B}(s_m, \tfrac{1}{n})$$

と置くと, 命題3.12と同様にして, K_ε はコンパクトで $\mu(S - K_\varepsilon) < \varepsilon$ となることが示せる. ゆえに, μ は tight である.

距離空間は perfectly Hausdorff なので, 命題3.8より, μ は regular.

よって, 命題3.5より, μ は Radon である $\square$

(P. A. Meyer)

<u>(4.14) 命題</u> S は Suslin 空間 (i.e., S は完備可分距離空間の連続写像による像として表される Hausdorff 空間) ならば, S 上の任意の Borel 測度は, Radon である.

(証明) 例えば, Schwartz [; p.122] を見よ $\square$

Lebesgue の有界収束定理は，可測関数のネットに対しては一般に成立しないことはよく知られている；次の命題の直後の反例4.17を見よ．次の命題は，位相空間上のτ-正則なBorel測度に対しては，ネットに対しても積分の収束定理が成立する場合があることを示している．

<u>(4.15)定理</u>．SはHausdorff空間，μはS上のτ-正則なBorel測度，$\{f_\alpha\}_{\alpha\in P}$は，$S$上の下半連続関数から成る単調増大ネットで，一様有界，i.e.，$\exists M>0$；$|f_\alpha(s)|\le M$ for all $s\in S$, $\alpha\in P$ であるとする（このとき極限関数 $f=\lim_{\alpha\in P} f_\alpha$ も存在して，下半連続となる）．このとき，

$$\int_S f\,d\mu=\lim_{\alpha\in P}\int_S f_\alpha\,d\mu$$

が成り立つ．

(証明) $\{f_\alpha\}_{\alpha\in P}$は一様有界なので一般性を失うことなく，$0\le f_\alpha, f\le 1$ for all $\alpha\in P$と仮定する．各$\alpha\in P$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\cdots,n$に対して

$$G_{\alpha,k,n}:=\left\{s\in S: f_\alpha(s)>\frac{k-1}{n}\right\},\quad G_{k,n}:=\left\{s\in S: f(s)>\frac{k-1}{n}\right\}$$

$$f_{\alpha,n}:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{G_{\alpha,k,n}},\qquad f_n:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{G_{k,n}}$$

とおく．

$\alpha\in P,\ n\in\mathbb{N}$ は固定：このとき

① $|f_{\alpha,n}(s)-f_\alpha(s)|<\frac{1}{n}$ かつ $|f_n(s)-f(s)|<\frac{1}{n}$ for $\forall s\in\mathfrak{S}$.

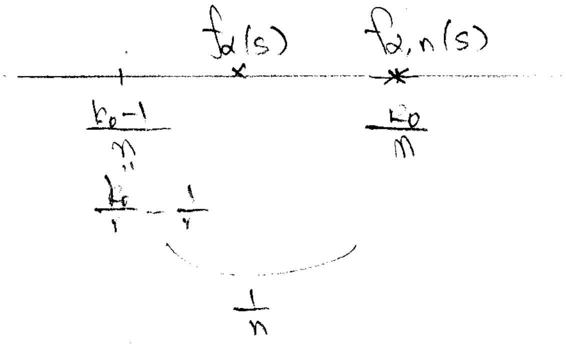
∵) $s\in\mathfrak{S}$ を固定：$1\le\exists k_0\le n$; $\frac{k_0-1}{n}<f_\alpha(s)\le\frac{k_0}{n}$ とできる.

このとき. $s\in G_{\alpha,k,n}$ for $k=1,2,\cdots,k_0$; $s\notin G_{\alpha,k,n}$ for $k=k_0+1,\cdots,n$

なので $f_{\alpha,n}(s)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{G_{\alpha,k,n}}(s)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0}1=\frac{k_0}{n}$

となる．よって

$|f_{\alpha,n}(s)-f_\alpha(s)|<\frac{1}{n}$



同様にして

$|f(s)-f_n(s)|<\frac{1}{n}$ を示せる ＃

② 各 $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\cdots,n$ に対して $\{G_{\alpha,k,n}\}_{\alpha\in P}$ は $\mathfrak{S}$ の開集合から成る単調増大列で $\bigcup_{\alpha\in P}G_{\alpha,k,n}=G_{k,n}$.

∵) f_α, f は共に下半連続なので $G_{\alpha,k,n}$, $G_{k,n}$ は $\mathfrak{S}$ の開集合であり.

$\{f_\alpha\}_{\alpha\in P}$ は単調増大なので $\{G_{\alpha,k,n}\}_{\alpha\in P}$ も単調増大となる.

次に. $s\in G_{k,n}$ とすると. $f(s)>\frac{k-1}{n}$ であるが. $f_\alpha(s)\to f(s)$ なので

$\exists\alpha_0\in P$; $f_{\alpha_0}(s)>\frac{k-1}{n}$ とできる. これ故に. $s\in G_{\alpha_0,k,n}\subset\bigcup_{\alpha\in P}G_{\alpha,k,n}$

ゆえに. $\bigcup_{\alpha\in P}G_{\alpha,k,n}\supset G_{k,n}$ が示された. 逆に $s\in\bigcup_{\alpha\in P}G_{\alpha,k,n}$ とすると $\exists\alpha_0\in P$;
$s\in G_{\alpha_0,k,n}$ ∴ $f_{\alpha_0}(s)>\frac{k-1}{n}$. ここで 仮定により $f(s)=\lim_{\alpha\in P}f_\alpha(s)$
かつ $\{f_\alpha(s)\}_{\alpha\in P}$ は単調増加な実数の net なので
$f(s)=\sup_{\alpha\in P}f_\alpha(s)$ となることに注意 ∴ $f(s)\ge f_\alpha(s)$
for $\forall\alpha\in P$ ∴ $f(s)\ge f_{\alpha_0}(s)>\frac{k-1}{n}$ ∴ $s\in G_{k,n}$
ゆえに $\bigcup_{\alpha\in P}G_{\alpha,k,n}\subset G_{k,n}$ も示された ＃

③ 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{\alpha\in P}\int_{\mathfrak{S}}f_{\alpha,n}\,d\mu=\int_{\mathfrak{S}}f_n\,d\mu$$

∵) μ は T-正則なので ②より.

$$\mu(G_{k,n}) = \lim_{\alpha\in\Gamma} \mu(G_{\alpha,k,n})$$

となる. よって.

$$\int_\Omega f_{\alpha,n}\,d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega \chi_{G_{\alpha,k,n}}\,d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(G_{\alpha,k,n})$$

$$\to \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu(G_{k,n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega \chi_{G_{k,n}}\,d\mu = \int_\Omega f_n\,d\mu$$

#

以上により 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\limsup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_\Omega f_\alpha\,d\mu - \int_\Omega f\,d\mu\right|$$

$$\leq \limsup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_\Omega f_\alpha\,d\mu - \int_\Omega f_{\alpha,n}\,d\mu\right| + \overbrace{\limsup_{\alpha\in\Gamma}\left|\int_\Omega f_{\alpha,n}\,d\mu - \int_\Omega f_n\,d\mu\right|}^{=0} + \left|\int_\Omega (f_n - f)\,d\mu\right|$$

$$\leq \limsup_{\alpha\in\Gamma}\int_\Omega |f_\alpha - f_{\alpha,n}|\,d\mu + \int_\Omega |f_n - f|\,d\mu < \frac{1}{n}\mu(\Omega) + \frac{1}{n}\mu(\Omega)$$

$$= \frac{2}{n}\mu(\Omega)$$

ここで $n\in\mathbb{N}$ は任意なので $n\to\infty$ とすると,

$$\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_\Omega f_\alpha\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu$$

が得られた □

(4.16) 系. $\mathcal{P}$ は Hausdorff 空間, μ は $\mathcal{P}$ 上の τ-正則な Borel 測度, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は $\mathcal{P}$ 上の上半連続関数から成る単調減少ネットで, 一様有界であるとする. (このとき極限関数 $f = \lim_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ が存在して上半連続となる). このとき,

$$\int_{\mathcal{P}} f\,d\mu = \lim_{\alpha\in\Gamma}\int_{\mathcal{P}} f_\alpha\,d\mu$$

が成り立つ.

(証明) $g_\alpha := -f_\alpha$ と置くと, $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は $\mathcal{P}$ 上の下半連続関数から成る単調増大ネットで一様有界であり, $\lim_{\alpha\in\Gamma} g_\alpha = -f$ となる. よって定理3.15より,

$$\int_{\mathcal{P}}(-f)\,d\mu = \lim_{\alpha\in\Gamma}\int_{\mathcal{P}} g_\alpha\,d\mu.$$

$$\therefore\ -\int_{\mathcal{P}} f\,d\mu = -\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_{\mathcal{P}} f_\alpha\,d\mu \quad \therefore\ \int_{\mathcal{P}} f\,d\mu = \lim_{\alpha\in\Gamma}\int_{\mathcal{P}} f_\alpha\,d\mu$$

□

(4.17) 反例. 定理3.15及び系3.16で $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ の単調性の仮定は取り除くことができない. また, Lebesgue の有界収束定理は, ネットに対しては一般に成立しない.

(反例の構成)

Γ に $[0,1]$ の有限部分集合全体から成る族に集合の包含関係で大小関係を導入して得られる有向集合.

各 $F\in\mathfrak{F}$ に対して

$$f_F(s) := \chi_F(s), \quad s\in[0,1]$$

と置くと、$\{f_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ は $[0,1]$ 上の上半連続関数から成るネットで、

$0\le f_F\le 1$，$\{f_F\}_{F\in\mathfrak{F}}$ は単調増大，それゆえ <u>単調減少ではない</u>．さらに

① $\displaystyle\lim_{F\in\mathfrak{F}} f_F(s) = 1 \quad (s\in[0,1])$

∵) $\forall s\in[0,1]$ を固定．$F_0=\{s\}\in\mathfrak{F}$ と置くと．$F\supseteq F_0$ のとき．$F\ni s$ なので

$f_F(s)=1$． //

② 各 $F\in\mathfrak{F}$ に対して $\displaystyle\int_0^1 f_F(s)ds = 0$，それゆえ $\displaystyle\int_0^1 f_F(s)ds \not\to \int_0^1 1ds$

∵) F は有限集合なので．Lebesgue 測度は 0．よって $\displaystyle\int_0^1 f_F(s)ds = \int_0^1 \chi_F(s)ds = 0$

ところが $\displaystyle\int_0^1 1ds = 1$ //

以上により．$\{f_i\}_{i\in D}$ の単調性の仮定が取り除けないこと及び Lebesgue の有界収束定理がネットでは成り立たないことがわかる □

定理 4.15 及び系 4.16 は．τ-正則な実測度の場合に拡張できる．

<u>(4.18) 定義.</u> μ は S 上の Borel 実測度とする．μ は．その全変動 $|\mu|$ が 正則，Radon，τ-正則，緊密のとき．それぞれ <u>正則</u>，<u>Radon</u>，<u>τ-正則</u>，

緊密という.

(4.19) 系　S は Hausdorff 空間、μ は S 上の τ-正則な実測度. $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の下半連続関数からなる単調増大ネットで、一様有界, i.e., $\exists M>0$; $|f_\alpha(s)|\leq M$ for all $s\in S$, $\alpha\in\Gamma$ であるとする. (このとき, 極限関数 $f=\lim_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ が存在して下半連続, それゆえ有界な Borel 可測関数となるので f_α 及び f は共に Dunford–Schwartz [　; Chapter III] の意味で μ-可積分である). このとき

$$\int_S f\,d\mu=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f\,d\mu_\alpha$$

が成り立つ.

(証明) μ の Jordan 分解を $\mu=\mu^+-\mu^-$ とすると $|\mu|=\mu^++\mu^-$ なので, μ^+,μ^- は共に τ-正則な Borel 測度となる. よって定理4.15より,

$$\int_S f\,d\mu^+=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d\mu^+,\quad \int_S f\,d\mu^-=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d\mu^-$$

となる. ゆえに

$$\int_S f\,d\mu=\int_S f\,d\mu^+-\int_S f\,d\mu^-$$

$$=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d\mu^+-\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d\mu^-$$

$$=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d(\mu^+-\mu^-)=\lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f_\alpha\,d\mu.$$

□

全く同様にして次の結果も得られる.

<u>(4.20) 系.</u> S は Hausdorff 空間, μ は S 上の τ-正則な実測度, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は S 上の上半連続関数からなる単調減少ネットで一様有界, i.e., $\exists M>0$; $|f_\alpha(s)|\le M$ for all $s\in S$, $\alpha\in\Gamma$ とする. (このとき, 極限関数 $f=\lim_{\alpha\in\Gamma} f_\alpha$ が存在して上半連続, それゆえ有界な Borel 可測関数となるので f_α 及び f は共に Dunford-Schwartz [; Chapter III] の意味で μ-可積分である). このとき

$$\int_S f\,d\mu = \lim_{\alpha\in\Gamma}\int_S f\,d\mu_\alpha$$

が成り立つ.

§5. 正則な測度の一意性

この§では、正則(Radon)なBorel測度は閉集合(コンパクト集合)における値によって一意的に決定されることおよび、τ-正則なBorel測度は、有界連続関数のその測度による積分の値によって一意的に決定されることを述べる。

<u>(5.1) 記号</u> この§を通じて

S : Hausdorff空間

$\mathcal{B}(S)$: SのBorel σ-集合体

$C_b(S)$: S上の実数値有界連続関数全体の作る実Banach空間

$$\text{with } \|f\|_\infty := \sup_{s \in S} |f(s)| < \infty$$

次の命題はBorel測度の一意性の証明の際にたびたび利用される。

<u>(5.2) 命題</u> μ, νはS上のBorel測度とする。

(1) μ, νは共に正則で、任意の閉集合F(開集合G)に対して $\mu(F) = \nu(F)$ $(\mu(G) = \nu(G))$ が成り立てば $\mu = \nu$ on $\mathcal{B}(S)$

(2) μ, νが共にRadonで、任意のコンパクト集合Kに対して $\mu(K) = \nu(K)$ が成り立てば $\mu = \nu$ on $\mathcal{B}(S)$

(証明) (1)で"閉集合"の場合だけ示す。残りは同様にして示せる。

$\forall \varepsilon>0$, $\forall B \in \mathcal{B}(S)$を固定. μ, νは正則なので, $\exists E_\varepsilon, \exists F_\varepsilon$: closed subset of S ; $E_\varepsilon, F_\varepsilon \subset B$で $\mu(B-E_\varepsilon)<\varepsilon$ かつ $\nu(B-F_\varepsilon)<\varepsilon$.

そこで $D_\varepsilon := E_\varepsilon \cup F_\varepsilon$ と置くと, D_εはclosedで, $D_\varepsilon \subset B$, さらに $\mu(B-D_\varepsilon)<\varepsilon$, $\nu(B-D_\varepsilon)<\varepsilon$ となる. 仮定より $\mu(D_\varepsilon)=\nu(D_\varepsilon)$なので

$$\begin{aligned}|\mu(B)-\nu(B)| &= |\mu(B-D_\varepsilon)+\mu(D_\varepsilon)-\nu(B-D_\varepsilon)-\nu(D_\varepsilon)| \\ &\leq \mu(B-D_\varepsilon)+\nu(B-D_\varepsilon)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

$\varepsilon>0$は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると, $\mu(B)=\nu(B)$ □

次の結果は, S上のBorel測度を$C_b(S)$の双対空間の中に埋め込む際に, その埋め込みが1対1(単射)であることを示すときに用いられる.

<u>(5.3) 命題</u>. Sは完全正則空間. μ, νはS上のτ-正則なBorel測度とする. 任意の$f \in C_b(S)$に対して $\int_S f d\mu = \int_S f d\nu$ ならば $\mu=\nu$ on $\mathcal{B}(S)$.

(証明) 命題4.7よりμ, νは正則となるので, 命題5.2(1)より, 任意の開集合Gに対して$\mu(G)=\nu(G)$が成り立つことを示せばよい.

$\forall G$: open subset of Sとする.

主張. $\chi_G = \sup_{f \in \mathcal{H}} f$. ただし, $\mathcal{H} := \{ f \in C_b(S) : 0 \le f \le \chi_G \}$ に

通常の関数の大小関係 ($f \le g$ 定義 $f(s) \le g(s)$ for $\forall s \in S$) で定められた

半順序が導入されているとする.

∵) $\forall s \in S$ を固定: $\chi_G(s) = \sup_{f \in \mathcal{H}} f(s)$ を示せばよい.

- $s \notin G$ の場合:

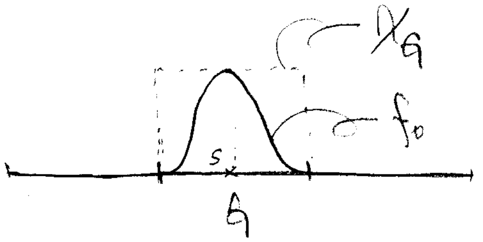
  (左辺) $= 0$. 一方, $\forall f \in \mathcal{H}$ に対して $0 \le f(s) \le \chi_G(s) = 0$ なので

  $f(s) = 0$ となる. よって (右辺) $= 0$

- $s \in G$ の場合: $s \notin G^c$ なので, S の完全正則性より $\exists f_0 \in C_b(S)$;

  $0 \le f_0 \le 1$, $f_0(s) = 1$, $f_0(G^c) = 0$.

  よって $0 \le f_0 \le \chi_G$. ∴ $f_0 \in \mathcal{H}$.



  ゆえに $1 \ge$ (右辺) $\ge f_0(s) = 1$

  ∴ (右辺) $= 1$. 一方, (左辺) $= 1$ //

よって, $\mathcal{H}$ は有向集合であり, $\{f\}_{f \in \mathcal{H}}$ は有界連続関数からなる単調増

加ネットで $\chi_G = \lim_{f \in \mathcal{H}} f$ が成り立つので, μ, ν が τ-正則であることと,

定理4.15より

$$\mu(G) = \int_S \chi_G \, d\mu = \lim_{f \in \mathcal{H}} \int_S f \, d\mu, \quad \nu(G) = \int_S \chi_G \, d\nu = \lim_{f \in \mathcal{H}} \int_S f \, d\nu$$

となる. ここで 仮定より, 各 $f \in \mathcal{H}$ に対して

$$\int_S f\,d\mu = \int_S f\,d\nu$$

なので $\mu(G)=\nu(G)$ となり証明が完了する． □

この節の結果も実測度の場合に拡張できる．

(5.4)系．μ,ν は S 上の Borel 実測度とする．

(1) μ,ν は共に正則で，任意の閉集合 F（開集合 G）に対して $\mu(F)=\nu(F)$ （$\mu(G)=\nu(G)$）が成り立てば $\mu=\nu$ on $\mathcal{B}(S)$．

(2) μ,ν が共に Radon で，任意のコンパクト集合 K に対して $\mu(K)=\nu(K)$ が成り立てば $\mu=\nu$ on $\mathcal{B}(S)$

(証明) (1)で"閉集合"の場合だけを示す．μ,ν の Jordan 分解を $\mu=\mu^+-\mu^-$，$\nu=\nu^+-\nu^-$ とする．仮定より，$\forall F$: closed に対して

$$\mu^+(F)-\mu^-(F)=\mu(F)=\nu(F)=\nu^+(F)-\nu^-(F)$$

$$\therefore\ (\mu^++\nu^-)(F)=(\nu^++\mu^-)(F)$$

ここで μ,ν は正則なので μ^+,μ^-,ν^+,ν^- は正則．それ故 $\mu^++\nu^-$，$\nu^++\mu^-$ は正則な Borel 測度となる．よって命題5.2より，$\mu^++\nu^-=\nu^++\mu^-$ on $\mathcal{B}(S)$

$$\therefore\ \mu=\mu^+-\mu^-=\nu^+-\nu^-=\nu \text{ on } \mathcal{B}(S)$$ □

(5.5) 系. S は完全正則空間, μ, ν は S 上の τ-正則な実測度とする.
任意の $f \in C_b(S)$ に対して $\int_S f d\mu = \int_S f d\nu$ ならば $\mu = \nu$ on $\mathcal{B}(S)$.

(証明) μ, ν の Jordan 分解を $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\nu = \nu^+ - \nu^-$ とする.
$\forall f \in C_b(S)$ を固定: 仮定より

$$\int_S f d\mu^+ - \int_S f d\mu^- = \int_S f d\mu = \int_S f d\nu = \int_S f d\nu^+ - \int_S f d\nu^-$$

$$\therefore \int_S f d(\mu^+ + \nu^-) = \int_S f d(\nu^+ + \mu^-)$$

ここで μ, ν は τ-正則なので $\mu^+, \mu^-, \nu^+, \nu^-$ は τ-正則. よって $\mu^+ + \nu^-$, $\nu^+ + \mu^-$ は共に τ-正則な測度となる. よって 命題5.3より,
$\mu^+ + \nu^- = \nu^+ + \mu^-$ on $\mathcal{B}(S)$. $\therefore \mu = \mu^+ - \mu^- = \nu^+ - \nu^- = \nu$ on $\mathcal{B}(S)$ □

§6. Borel 測度の台

この§では Borel 測度の台の定義とその基本的性質をまとめる.

(6.1) 記号. この§を通じて

S : Hausdorff 空間

$\mathcal{B}(S)$: S の Borel σ-集合体

(6.2) 定義. μ は S 上の Borel 測度とする.

$$S_\mu := \bigcap\{F : F \text{ は closed subset of } S,\ \mu(S-F)=0\}$$

$$U_\mu := \bigcup\{U : U \text{ は open subset of } S,\ \mu(U)=0\}$$

$$C_\mu := \{s\in S : s \text{ の任意の開近傍 } U_s \text{ に対して } \mu(U_s)>0\}.$$

(6.3) 命題. μ は S 上の Borel 測度とする

(1) $S_\mu = U_\mu^c = C_\mu$

(2) S が距離空間のとき, S_μ は (S からの相対位相に関して) 可分.

(証明) (1) 左側の等号は明らか. よって右側の等号を示す.

$s\in U_\mu^c$ とする. $s\notin C_\mu$ と仮定すると, $\exists U_s$: s の開近傍 ; $\mu(U_s)=0$.

このとき $s\in U_s\subset U_\mu$. これは $s\notin U_\mu$ に反する. よって $s\in C_\mu$.

逆に, $s\in C_\mu$ とする. $s\in U_\mu$ と仮定すると, $\exists U$: open set with $s\in U$ かつ $\mu(U)=0$.

このとき、U_n は s_α の開近傍なので、G_μ の定義より、$s \notin G_\mu$。これは矛盾！

∴ $s \in U_\mu^c$

(2) S_μ が可分でないとすると、∃非可算集合 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset S_\mu$;

$$\inf\{d(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}) : \alpha_1 \neq \alpha_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma\} > 0,$$

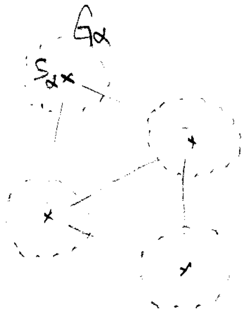
これ故、∃$\varepsilon_0 > 0$;

$$d(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}) \geq \varepsilon_0 \quad \text{for all } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ in } \Gamma \qquad (*)$$

となる。ここで

$$G_\alpha := \{s \in S : d(s, s_\alpha) < \frac{\varepsilon_0}{2}\}, \quad \alpha \in \Gamma$$

とおくと



① $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は互いに素な開集合からなる集合族

∵) G_α の定義と (*) より明らか //

② $\mu(G_\alpha) > 0$ for all $\alpha \in \Gamma$

∵) ∃$\alpha_0 \in \Gamma$; $\mu(G_{\alpha_0}) = 0$ と仮定すると G_{α_0} は s_{α_0} の開近傍なので、G_μ の定義より、$s_{\alpha_0} \notin G_\mu$。ところが(1)で示したことから $G_\mu = S_\mu$ なので $s_{\alpha_0} \in S_\mu$ となり矛盾！ //

よって、各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma_k := \{\alpha \in \Gamma : \mu(G_\alpha) > \frac{1}{k}\}$$

とおくと、

③ $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k = \Gamma$

$\because$) $\alpha\in\Gamma$ とすると、②より、$\mu(G_\alpha)>0$。よって十分大きな $k_0\in\mathbb{N}$ が存在して、

$\mu(G_\alpha)>\dfrac{1}{k_0}$ とできる。$\therefore\ \alpha\in\Gamma_{k_0}$ $\therefore\ \alpha\in$ (右辺) ※

④ 各 Γ_k は有限集合

$\because$) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ を Γ_k の中の異なる要素とすると

$$\frac{n}{k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k}\leq\sum_{i=1}^{n}\mu(G_{\alpha_i})=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}\right)\leq\mu(S).$$

各 $\alpha_i\in\Gamma_k$ なので $\mu(G_{\alpha_i})>\dfrac{1}{k}$　　$\{G_\alpha\}$ は互いに素

$\therefore\ n\leq k\cdot\mu(S)$。ゆえに Γ_k の中の異なる要素は高々有限個しかない。

よって、Γ_k は有限集合 ※

③、④より Γ は高々可算集合となるので、Γ が非可算集合であることに反する。

ゆえに矛盾！ よって、S_μ は (S からの相対位相に関して) 可分 □

<u>(6.4) 定義</u>　μ は S 上の Borel 測度とする。

μ が <u>台をもつ</u> $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mu(S-S_\mu)=0$

このとき、S_μ のことを μ の <u>台</u> (support) という

<u>(6.5) 命題</u>　S 上のすべての τ-正則な Borel 測度は台をもつ。

(証明) $\mathcal{H}:=\{U : U$ は S の開集合で $\mu(U)=0\}$

とおき、$\mathcal{H}$ に集合の包含関係で順序を導入すると $\mathcal{H}$ は有向集合となる。

このとき、$\{H\}_{H\in\mathcal{H}}$ は S の開集合からなる単調増大ネットで、U_μ の定義より
$\bigcup_{H\in\mathcal{H}} H = U_\mu$ となるので、μ の τ-正則性より

$$\mu(U_\mu) = \lim_{H\in\mathcal{H}} \mu(H) = 0$$

となる。よって $\mu(S - S_\mu) = \mu(U_\mu) = 0$。ゆえに μ は台をもつ □

(6.6) 系. S は距離空間、μ は S 上の Borel 測度とする。このとき、次の3つの条件は同値：

(1) μ は台をもつ。

(2) 可分閉集合 $F \subset S$ が存在して $\mu(S-F)=0$.

(3) μ は τ-正則.

(証明) (1)⇒(2) は、命題6.3 (2)、(3)⇒(1) は命題7.5 から導かれる。

(2)⇒(3): 少し準備する:

主張1 $\mathcal{B}(F) = \{B\cap F : B\in\mathcal{B}(S)\}$.

∵) S の開集合族を $\mathcal{G}$ とすると、$\mathcal{G}\cap F := \{G\cap F : G\in\mathcal{G}\}$ は F の開集合族となる。よって、

$$\mathcal{B}(F) = \sigma(\mathcal{G}\cap F) \underset{\uparrow}{=} \sigma(\mathcal{G})\cap F = \mathcal{B}(S)\cap F. \quad /\!/$$

Halmos [; p.]

各 $A\in\mathcal{B}(F)$ は主張1より、$A = B\cap F$, $B\in\mathcal{B}(S)$ と表わされるので

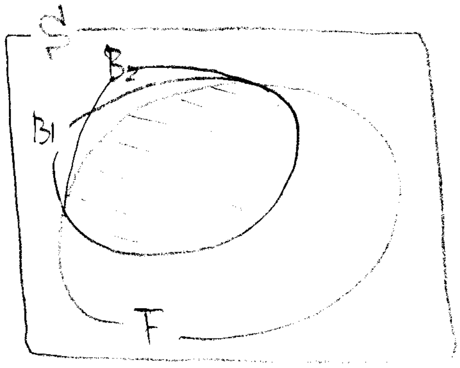
$$\mu^*(A) := \mu(B\cap F).$$

と定義すると.

主張2. この定義は well-defined, i.e., $B_1 \cap F = B_2 \cap F$ $(B_1, B_2 \in \mathcal{B}(S))$ ならば

$\mu(B_1) = \mu(B_2)$ で, μ^* は F 上の Borel 測度

∵) well-definedであること:



$$B_1 = \underbrace{(B_1 - F) \cup (B_1 \cap F)}_{\text{互いに素}}$$

$$B_2 = (B_2 - F) \cup (B_2 \cap F)$$

であるので $\mu(B_1) = \mu(B_1 - F) + \mu(B_1 \cap F)$

$$\mu(B_2) = \mu(B_2 - F) + \mu(B_2 \cap F)$$

仮定より, $\mu(S - F) = 0$ なので $\mu(B_1 - F) = \mu(B_2 - F) = 0$. さらに, $B_1 \cap F = B_2 \cap F$ なので $\mu(B_1 \cap F) = \mu(B_2 \cap F)$. よって $\mu(B_1) = \mu(B_2)$ //

μ^* が F 上のBorel測度であること.

$\phi = \phi \cap F$ と表されるので $\mu^*(\phi) = \mu(\phi) = 0$.

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(F)$ で $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ とする. 各 A_n は, $A_n = B_n \cap F$ $(B_n \in \mathcal{B}(S))$ と表される (このとき, $B_i \cap B_j = \phi$ $(i \neq j)$ となるとは限らない!)

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap F) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap F$ なので

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap F\right) + \underbrace{\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cap (S - F)\right)}_{=0 \ (\mu(S-F)=0 \text{より})}$$

$$= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap F)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \cap F) \longleftarrow \{B_n \cap F\}_{n=1}^{\infty}$$ は互いに素な集合からなる集合族

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \longleftarrow \mu(B_n) = \mu(B_n \cap F) + \underbrace{\mu(B_n \cap (S-F))}_{0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

以上より、μ^* は F 上の Borel 測度となる $\#$

よって、F は S からの相対位相に関して可分距離空間なので、命題 4.10 より、μ^* は F 上の τ-正則な測度となる。以下で、μ 自身が τ-正則となることを示す：

$\{G_\alpha\}_{\alpha \in P}$ は S の開集合からなる単調増大ネットで $\bigcup_{\alpha \in P} G_\alpha = G$ とすると、$\{G_\alpha \cap F\}_{\alpha \in P}$ は F の開集合からなる単調増大ネットで $\bigcup_{\alpha \in P}(G_\alpha \cap F) = G \cap F$ となる。

よって、μ^* の τ-正則性より

$$\mu(G) = \mu^*(G \cap F) = \lim_{\alpha \in P} \mu^*(G_\alpha \cap F) = \lim_{\alpha \in P} \mu(G_\alpha).$$

ゆえに μ は τ-正則 □

§7 有限加法的集合関数の Radon 測度への拡張

この§では位相空間上の有限加法的集合関数が $\mathcal{S}$ 上の Radon 測度へ一意的に拡張可能となるための十分条件を与える.

<u>(7.1) 記号.</u> 以下, この§を通じて

$\mathcal{S}$: Hausdorff 空間

$\mathcal{B}(\mathcal{S})$: $\mathcal{S}$ の Borel σ-集合体

$\sigma(\mathcal{E})$: 集合族 $\mathcal{E}$ によって生成される σ-集合体

次の結果は Hahn の拡張定理として一般の測度論でよく知られている (例えば, Dunford & Schwartz [; p.136] を見よ).

<u>(7.2) 定理</u> (Hahn の拡張定理) Ω は空でない集合, $\mathfrak{F}$ は Ω の部分集合からなる集合体で $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{F})$, $\mu : \mathfrak{F} \to [0, \infty)$ は有限加法的であるとする. このとき, μ が <u>$\mathfrak{F}$ 上で可算加法的</u>, i.e., 任意の集合族 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{F}$ with $B_i \cap B_j = \phi$ if $i \neq j$ and $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{F}$ に対して $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ が成り立つならば, μ は $\mathfrak{A}$ 上の可算加法的集合関数, i.e., $\mathfrak{A}$ 上の測度に一意的に拡張できる.

次の結果は位相空間上の有限加法的集合関数に対しては、Borel σ-集合体を生成する集合体上での"Radon性"から"完全加法性"が自動的に導かれることを示している。

<u>(7.3) 定理</u> (Alexandoroff) S は Hausdorff 空間、$\mathcal{F}$ は S の閉集合をすべて含む集合体で、$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ は有限加法的とする。このとき、μ が <u>$\mathcal{F}$ 上で Radon</u>, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \in \mathcal{F}$ に対して $\exists K$: compact subset of S with $K \in \mathcal{F}$ かつ $K \subset B$; $\mu(B) - \mu(K) < \varepsilon$ が成り立つならば、μ は $\mathcal{F}$ 上で可算加法的となる。それゆえ μ は S 上の Radon 測度に一意的に拡張できる。

(証明) <u>拡張可能性</u>: 定理7.2 (Hahn の拡張定理) より、μ が $\mathcal{F}$ 上で可算加法的であることを示せばよい。

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ を互いに素な集合からなる集合族とし、$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ とする。

$\forall \varepsilon > 0$ を固定：このとき仮定より μ は $\mathcal{F}$ 上で Radon なので

$\exists K_\varepsilon$: compact subset of S ; $K_\varepsilon \subset A$ かつ $\mu(A - K_\varepsilon) < \varepsilon$

となる。各 $A_n \in \mathcal{F}$ なので再び μ の Radon 性により

$\exists G_n$: open subset of S ; $A_n \subset G_n$ かつ $\mu(G_n) - \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

とできる。ここで $K_\varepsilon \subset A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ で K_ε は compact なので

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $K_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} G_n$ となる. よって.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu(G_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) - \varepsilon$$
$$\geq \sum_{n=1}^{n_0} \mu(G_n) - \varepsilon$$
$$\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{n_0} G_n\right) - \varepsilon$$

μは有限劣加法的

$$\geq \mu(K_\varepsilon) - \varepsilon$$
$$\geq \mu(A) - \varepsilon - \varepsilon = \mu(A) - 2\varepsilon$$

ここで εについては任意なので ε↓0とすると,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

が得られる. 逆に, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{n=1}^{m} A_n \subset A$ なので

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$$
$$\therefore \mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

以上より, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ となり, μの $\mathcal{F}$ 上での可算加法性が示された.

よって, Hahnの拡張定理より, μは $\sigma(\mathcal{F})$ 上の測度 $\tilde{\mu}$ に一意的に拡張される.

ここで $\mathcal{B}(S) \subset \sigma(\mathcal{F})$ なので, この拡張の $\tilde{\mu}$ の $\mathcal{B}(S)$ 上への制限を $\bar{\mu}$ とすると,

$\bar{\mu}$ が求める Borel測度となる.

<u>Radon性</u>: まず, regularであることを示す.

$\mathcal{D} := \{B \in \sigma(\mathcal{F}) : \tilde{\mu}(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B, F \text{ is closed}\}\}$

と置くと. $\mathcal{D}$ は σ-集合体である.

∵) $\forall \varepsilon>0$ を固定:

- $S \in \mathcal{F}$ ゆえ. μ の $\mathcal{F}$ 上での Radon 性より

  $\exists K_\varepsilon$: compact ; $K_\varepsilon \subset S$ かつ $\mu(S)-\mu(K_\varepsilon)<\varepsilon$.

  K_ε は closed で $\tilde{\mu}(S)=\mu(S)$ なので $\tilde{\mu}(S)-\mu(K_\varepsilon)<\varepsilon$ ∴ $S\in\mathcal{D}$

- $A\in\mathcal{D}$ とする

  $\exists G_\varepsilon$: open ; $A\subset G_\varepsilon$ かつ $\mu(G_\varepsilon)-\tilde{\mu}(A)<\varepsilon$.

  このとき. $F_\varepsilon := S-G_\varepsilon$ は closed で $F_\varepsilon\subset S-A$ で

  $\tilde{\mu}(S-A)-\mu(F_\varepsilon)=\mu(G_\varepsilon)-\tilde{\mu}(A)<\varepsilon$ ∴ $S-A\in\mathcal{D}$

- $A_n\in\mathcal{D}$ $(n=1,2,\cdots)$ とすると.

  $\exists G_n$: open ; $A_n\subset G_n$ かつ $\mu(G_n)-\tilde{\mu}(A_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$

  ここで $G_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ と置くと. G_ε は open で $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\subset G_\varepsilon$ で

$$
\begin{aligned}
\mu(G_\varepsilon)-\tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big) &= \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big) \\
&\leq \tilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-A_n)\Big) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\mu}(G_n-A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n-\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n-A_n)$$

  ∴ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{D}$.

  以上より. $\mathcal{D}$ は σ-集合体 //

μ は $\mathcal{F}$ 上で Radon なので $\mathcal{F}\subset\mathcal{D}$ ∴ $\mathcal{B}(S)\subset\sigma(\mathcal{F})=\mathcal{D}$

ゆえに $\bar{\mu}$ は $\mathcal{B}(S)$ 上で正則．∴ $\bar{\mu}$ は $\mathcal{B}(S)$ 上で正則．

次に $\bar{\mu}$ が tight であることを示す．

$\forall \varepsilon > 0$ を固定：$S \in \mathcal{F}$ ゆえ μ の $\mathcal{F}$ 上での Radon 性より $\exists K_\varepsilon$: compact ;

$$K_\varepsilon \subset S \text{ かつ } \mu(S) - \mu(K_\varepsilon) < \varepsilon .$$

ここで $\bar{\mu}(S) = \mu(S)$, $\bar{\mu}(K_\varepsilon) = \mu(K_\varepsilon)$ なので $\bar{\mu}(S) - \bar{\mu}(K_\varepsilon) < \varepsilon$.

ゆえに $\bar{\mu}$ は tight．よって $\bar{\mu}$ は正則かつ tight なので命題3.5より $\bar{\mu}$ は $\mathcal{B}(S)$ 上で Radon である．

一意性：$\nu : \mathcal{B}(S) \to [0, \infty)$ を μ の Radon 拡張とすると，$\bar{\mu}$ と ν は全ての閉集合上で一致する．ここで $\bar{\mu}$ と ν は Radon，それゆえ正則なので命題5.2(1)より $\bar{\mu} = \nu$ on $\mathcal{B}(S)$ となる．ゆえに，μ の $\mathcal{B}(S)$ 上への Radon 拡張は一意に定まる □

上の結果は一般の実数値集合関数の場合に直ちに拡張される：

(7.4) 系．S は Hausdorff 空間，$\mathcal{F}$ は S の閉集合をすべて含む集合体で，$\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は有界かつ有限加法的とする．このとき，μ が $\mathcal{F}$ 上で Radon, i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \in \mathcal{F}$ に対して $\exists K$: compact with $K \subset B$; $|\mu|(B - K) < \varepsilon$ が成り立つならば，μ は S 上の Radon 実測度に一意的に拡張される．

(証明) μ の Jordan 分解を $\mu = \mu^+ - \mu^-$ とする. このとき, μ^+, μ^- は $\mathcal{F}$ 上で有界かつ有限加法的である. それに μ の Radon 性より, μ^+, μ^- も $\mathcal{F}$ 上で Radon である. よって定理7.3より, μ^+, μ^- の Radon 拡張 $\overline{\mu^+}, \overline{\mu^-}$ が存在する. $\overline{\mu} := \overline{\mu^+} - \overline{\mu^-}$ とおくと $\overline{\mu}$ は S 上の Radon 測度で $\overline{\mu} = \mu$ on $\mathcal{F}$ となる.
よって, この $\overline{\mu}$ が求める μ の Radon 拡張である.

一意性: λ_1, λ_2 は共に μ の Radon 拡張とし, $\lambda := \lambda_1 - \lambda_2$ とおくと, $|\lambda| = 0$ on $\mathcal{F}$. ここで λ_1, λ_2 は Radon 実測度なので $|\lambda|$ は Radon 測度, それゆえ正則となる. $\mathcal{F}$ は S のすべての開集合を含んでいるので, 命題5.2より $|\lambda| = 0$ on $\mathcal{B}(S)$. $\therefore \lambda_1 = \lambda_2$ on $\mathcal{B}(S)$. よって一意性が示された. □

(7.5) 注意. σ-集合体上で定義された任意の実測度は有界なので (例えば Swartz [; p.30] を見よ), 系7.4で得られる S 上の Radon 実測度は有界である.

§8 有界関数と有界な有限加法的集合関数の作るBanach束

この節では有界関数や有界な有限加法的集合関数の作るBanach束をいくつか紹介し，それらの間のBanach束としての同型対応を与える．

<u>(8.1) 記号と約束</u>　以下，この節を通じて

Ω：空でない集合

$\mathcal{F}$：Ωの部分集合からなる集合体

2^{Ω}：Ωのすべての部分集合からなる集合族

とする．また，関数や集合関数は特に断わりのない限り実数値であるとする．

<u>(8.2) 定義</u>

$B(\Omega)$：Ω上の有界な関数全体の作るBanach束

- ノルム：$\|f\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$
- 順序：$f\leq g \overset{\text{def}}{\iff} f(\omega)\leq g(\omega)$ for all $\omega\in\Omega$
- 束構造：$(f\vee g)(\omega) := \max(f(\omega), g(\omega))$

$$(f\wedge g)(\omega) := \min(f(\omega), g(\omega))$$

$B(\Omega, \mathcal{F})$：$\mathcal{F}$に属する集合から作られる単関数（これを$\mathcal{F}$-単関数とよぶ）の列の一様収束の極限関数として表されるもの全体

(8.3) 命題

(1) $B(\Omega,\mathcal{F})$ は closed sublattice of $B(\Omega)$. それ故に, $B(\Omega,\mathcal{F})$ はそれ自身で Banach 束.

(2) $B(\Omega)=B(\Omega,2^{\Omega})$.

(証明) (1) $B(\Omega,\mathcal{F})\subset B(\Omega)$ であること: $f\in B(\Omega,\mathcal{F})$ とすると, $\mathcal{F}$-単純関数列 $\{f_n\}$ が存在して $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ となる. よって, $\exists n_0\in\mathbb{N}$; $|f(\omega)-f_{n_0}(\omega)|<1$ for all $\omega\in\Omega$. ∴ $|f(\omega)|\leq|f(\omega)-f_{n_0}(\omega)|+|f_{n_0}(\omega)|<1+|f_{n_0}(\omega)|$.

ここで f_{n_0} は単純関数なので Ω 上で有界. よって,

$$|f(\omega)|<1+\sup_{\omega\in\Omega}|f_{n_0}(\omega)|<\infty \quad \text{for all } \omega\in\Omega.$$

ゆえに, $f\in B(\Omega)$.

$B(\Omega,\mathcal{F})$ が $B(\Omega)$ の線形部分空間であることは明らか. よって部分束であることと閉であることを示す.

sublattice であること: $f,g\in B(\Omega,\mathcal{F})$ とする. このとき, $\mathcal{F}$-単純関数列 $\{f_n\},\{g_n\}$ が存在して $\|f-f_n\|_\infty\to 0$, $\|g-g_n\|_\infty\to 0$ となる. $f_n\vee g_n$, $f_n\wedge g_n$ は明らかに $\mathcal{F}$-単純関数である. このとき, Birkhoff の不等式より

$$\begin{aligned}|f_n\vee g_n-f\vee g|&=|f_n\vee g_n-f\vee g_n+f\vee g_n-f\vee g|\\&\leq|f_n\vee g_n-f\vee g_n|+|f\vee g_n-f\vee g|\\&\leq|f_n-f|+|g_n-g|\end{aligned}$$

となる. ここで $\|\cdot\|_\infty$ は lattice norm なので 上式は.

$$\|f_n \vee g_n - f \vee g\|_\infty \leq \| |f_n - f| + |g_n - g| \|_\infty$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \to 0$$

となる. よって. $f \vee g \in B(\Omega, \mathfrak{F})$. 同様にして. $f \wedge g \in B(\Omega, \mathfrak{F})$. ゆえに $B(\Omega, \mathfrak{F})$ は sublattice of $B(\Omega)$.

<u>closed であること:</u> $f_n \in B(\Omega, \mathfrak{F})$, $f \in B(\Omega)$ で $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ を固定: このとき. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \varepsilon$. ここで $f_{n_0} \in B(\Omega, \mathfrak{F})$ なので $\exists \{g_n\}$: $\mathfrak{F}$-単関数列; $\|g_n - f_{n_0}\|_\infty \to 0$ とできる. よって.

$$\|g_n - f\|_\infty \leq \|g_n - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0} - f\|_\infty < \|g_n - f_{n_0}\|_\infty + \varepsilon$$

$$\therefore \limsup_{n \to \infty} \|g_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると. $\|g_n - f\|_\infty \to 0$ が得られる. よって $f \in B(\Omega, \mathfrak{F})$ となり. $B(\Omega, \mathfrak{F})$ が closed subset of $B(\Omega)$ であることが示された.

(2) 2^Ω は σ-集合体であり. すべての $f \in B(\Omega)$ は $(2^\Omega, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$-可測となるので Swartz [; p.78] より f は 2^Ω-単関数列の一様収束極限として表される. よって. $f \in B(\Omega, 2^\Omega)$ となる. ゆえに $B(\Omega) \subset B(\Omega, 2^\Omega)$ である.

逆の包含関係は (1) で $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ と置けばよい. □

次に有限加法的な集合関数からなるBanach束を定義する。

(8.4)定義.

$ba(\Omega,\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$上で定義された有界な有限加法的集合関数全体から

なるBanach束

• ノルム : $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$

• 順序 : $\mu \leq \nu \overset{\text{def}}{\iff} \mu(A) \leq \nu(A)$ for all $A \in \mathcal{F}$

• 束構造 : $(\mu \vee \nu)(A) := \sup\{\mu(E) + \nu(A-E) : E \subset A, E \in \mathcal{F}\}$

$(\mu \wedge \nu)(A) := \inf\{\mu(E) + \nu(A-E) : E \subset A, E \in \mathcal{F}\}$

$ba(\Omega) := ba(\Omega, 2^{\Omega})$.

(8.5)注意　$ba(\Omega,\mathcal{F})$がBanach束となることの証明は、Swartz [　; p.223] を見よ。

(8.6)命題.　$\mu \in ba(\Omega,\mathcal{F})$とする。任意の$f \in B(\Omega,\mathcal{F})$は Dunford-Schwartz [　; Chapter III] の意味でμ-可積分で、各$E \in \mathcal{F}$に対して、

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d|\mu| \leq \sup_{\omega \in E}|f(\omega)| \cdot |\mu|(E)$$

が成り立つ。

(証明). 以下、この証明では Dunford-Schwartz [　; Chapter III] の用語と

定義を用いる。$f \in B(\Omega, \mathcal{F})$ とすると、$\exists \{f_n\}$: $\mathcal{F}$-単純関数列 ; $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ となる。μ は有界なので $|\mu|(\Omega) < \infty$。よって、各 f_n は、μ-可積分な単純関数であり、

① $f_n \to f$ in μ-measure on Ω

∵) 全変動 $|\mu|$ に対して

$$|\mu|^*(E) := \inf\{|\mu|(A) : E \subset A \text{ で } A \in \mathcal{F}\}, \quad E \subset \Omega.$$

と置く。このとき、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n\to\infty} |\mu|^*\left(\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}\right) = 0 \qquad (1)$$

を示せばよい。$\forall \varepsilon > 0$ を固定 : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $n \geq n_0$ のとき、$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$$\therefore \{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\} = \phi \quad \text{for all } n \geq n_0$$

$$\therefore |\mu|^*\left(\{\omega \in \Omega : |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\}\right) = |\mu|^*(\phi) = 0 \quad \text{for all } n \geq n_0.$$

よって、(1) が示された #

② $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\,|\mu|(d\omega) = 0$

∵) $|\mu|(\Omega) < \infty$ なので、

$$\int_\Omega |f_m(\omega) - f_n(\omega)| \cdot |\mu|(d\omega) \leq \int_\Omega \|f_m - f_n\|_\infty \,|\mu|(d\omega)$$

$$\leq \|f_m - f_n\|_\infty \cdot |\mu|(\Omega)$$

$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ なので $\{f_n\}$ は Cauchy 列。よって、$\|f_m - f_n\|_\infty \to 0$

$$\therefore \lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega |f_m(\omega) - f_n(\omega)| \cdot |\mu|(d\omega) = 0 \quad \#$$

以上より、f は Dunford-Schwartz [; Definition III. 2.17] の意味で Ω 上で μ-可積分で、Dunford-Schwartz [; Theorem III. 2.20 (a)] より、各 $E \in \mathcal{F}$ に対して

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \le \int_E |f|\,d|\mu| \overset{\downarrow}{=} \int_E |\chi_E f|\,d|\mu|$$

Dunford-Schwartz [ ] の Theorem III. 2.19 (b).

$$\le \|\chi_E f\|_\infty \cdot |\mu|(E) = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)| \cdot |\mu|(E).$$

が成り立つ。

<u>(8.7) 定理</u> Banach 束 $ba(\Omega, \mathcal{F})$ と $B(\Omega, \mathcal{F})^*$ の対応

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) := \int_\Omega f\,d\mu, \quad f \in B(\Omega, \mathcal{F})$$

によって等距離順序同型となる。

(証明) 命題 8.6 より、$ba(\Omega, \mathcal{F})$ から $B(\Omega, \mathcal{F})^*$ への対応

$$\mu \mapsto L_\mu(f) := \int_\Omega f\,d\mu, \quad f \in B(\Omega, \mathcal{F})$$

は well-defined で $\|L_\mu\| \le \|\mu\|$ となる。また積分の線形性より、この対応は線形である。よって、以下では $\|\mu\| \le \|L_\mu\|$ となることと及びこの対応が全射かつ順序を保存することを示す。

<u>$\|\mu\| \le \|L_\mu\|$ であること:</u> $\forall \varepsilon > 0$ を固定。$\{A_i\}_{i=1}^n$ は Ω の $\mathcal{F}$-可測分割で

$$\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| > \|\mu\| - \varepsilon$$

を満たすとする．このとき $\alpha_i \mu(A_i) = |\mu(A_i)|$ を満たす~~実数~~ α_i をとり

$$f_\varepsilon := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

と置くと，$f_\varepsilon \in B(\Omega, \mathcal{F})$ で $\|f\|_\infty \leq 1$ となる．よって

$$\|L_\mu\| \geq \int_\Omega f_\varepsilon d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| > \|\mu\| - \varepsilon$$

となる．ここで $\varepsilon > 0$ は任意なので $\|L_\mu\| \geq \|\mu\|$ が得られる #

<u>全射であること</u>：$L \in B(\Omega, \mathcal{F})^*$ とする．このとき

$$\mu(A) := L(\chi_A), \quad A \in \mathcal{F}$$

と置くと．μ は $\mathcal{F}$ 上で有限加法的であり

$$|\mu(A)| = |L(\chi_A)| \leq \|L\| \quad \text{for all } A \in \mathcal{F}$$

となるので $\mathcal{F}$ 上で有界である．よって $\mu \in ba(\Omega, \mathcal{F})$ となる．ゆえに．残っている仕事は．

$$L(f) = \int_\Omega f d\mu \quad \text{for all } f \in B(\Omega, \mathcal{F}) \tag{2}$$

を示すことである．μ の定義より．(2) は．$\mathcal{F}$-単関数に対しては成り立つ．これから単関数の全体は $B(\Omega, \mathcal{F})$ で稠密であること及び (2) の両辺は $B(\Omega, \mathcal{F})$ 上で f に関して $\|\cdot\|_\infty$ に関して連続であることから、(2) は $B(\Omega, \mathcal{F})$ に属するすべての関数に対して成り立つ．よって対応は全射である #

<u>順序保存性</u>：$\mu \geq 0 \iff L_\mu(f) \geq 0$ for $\forall f \in B(\Omega, \mathcal{F})$ with $f \geq 0$ を

示せばよい. ($\Rightarrow$) は積分の定義より明らか.

($\Leftarrow$). $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して $f = \chi_A$ と置くと, $f \geq 0$ で $f \in B(\Omega, \mathcal{F})$. よって. μ の定義より. $\mu(A) = L(\chi_A) = \int_\Omega \chi_A d\mu \geq 0$ となる #

以上ですべての証明が完了した □

<u>(8.8)系.</u> Banach束 $ba(\Omega)$ と $B(\Omega)^*$ は. 対応

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) := \int_\Omega f d\mu, \quad f \in B(\Omega)$$

によって等距離順序同型となる.

(証明) 命題8.3 (2) より $\mathcal{F} = 2^\Omega$ と置くと. $B(\Omega, \mathcal{F}) = B(\Omega)$. また

$ba(\Omega, \mathcal{F}) = ba(\Omega)$ となるので定理8.5から導かれる. □

§4 Riesz-Makov-Kakutaniの定理の拡張（有限加法的な場合）

この節では一般の完全正則空間Sの場合に、$C_b(S)$の双対空間の表現定理、すなわち$C_b(S)$上の有界線形汎関数が緊密性の条件（この条件はSがコンパクト空間の場合は自動的に満たされる）を満たすならば、S上のRadonな有限加法的集合関数による積分で与えられることを証明する。類似の結果は、Sが正規空間の場合にDunford-Schwartz [; Theorem IV.6.2] で与えられており、我々の定理はそこでの証明を適当に変更することにより証明される。

(4.1) 記号. この節を通じて

S : Hausdorff空間

$C_b(S)$: S上で定義された有界な実数値連続関数全体からなるBanach束

ノルム : $\|f\|_\infty := \sup_{s\in S}|f(s)|$

順序 : $f\le g \overset{\text{def}}{\iff} f(s)\le g(s)$ for all $s\in S$

束構造 : $(f\vee g)(s) := \max(f(s), g(s))$

$(f\wedge g)(s) := \min(f(s), g(s))$, $s\in S$

$C_b(S)^*$: $C_b(S)$上の有界線形汎関数全体からなるBanach束

ノルム $\|L\| := \sup_{\|f\|_\infty\le 1}|L(f)|$

順序 : $L\le M \overset{\text{def}}{\iff} L(f)\le M(f)$ for all $f\in C_b(S)$ with $f\ge 0$

束構造: $(L\vee M)(f) := \sup\{L(g)+M(f-g) : 0\le g\le f\}$

$(L\wedge M)(f) := \inf\{L(g)+M(f-g) : 0\le g\le f\}$

ただし. $f\in C_b(S)$ with $f\ge 0$.

(9.2) 命題　$\mathcal{F}$ は S の閉集合によって生成される集合体. $\mu\in ba(S,\mathcal{F})$ とする. このとき. すべての $f\in C_b(S)$ は. Dunford–Schwartz [　; Chapter III] の意味で μ-可積分で. 各 $E\in\mathcal{F}$ に対して

$$\left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d|\mu| \le \sup_{s\in E}|f(s)|\cdot|\mu|(E)$$

が成り立つ.

(証明) $f\in C_b(S)$ とする. 命題8.6より $f\in B(S,\mathcal{F})$ を示せばよい.

$\forall\varepsilon>0$ を固定: $f(S)$ は $\mathbb{R}$ で有界なので. 半径 ε の開球 $G_1,\cdots,G_n$ が存在して. $f(S)\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$ とできる. そこで $A_1 := G_1$, $A_2 := G_2-G_1$, $\cdots$, $A_n := G_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}G_i$ と置く. 各 $j=1,2,\cdots,n$ に対して $A_j\ne\phi$ のときは A_j から要素 a_j を1つ選ぶ. $A_j=\phi$ のときは $a_j=0$ とする. さらに. $B_j=f^{-1}(A_j)$ として

$$f_\varepsilon := \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{B_j}$$

と置く.

① f_ε は $\mathcal{F}$-単関数

∵) A_j の定義の仕方より $B_j=f^{-1}(G_j)-\bigcup_{i=1}^{j-1}f^{-1}(G_i)$ となり. f の連続性

より 各 $f^{-1}(G_i) \in \mathfrak{F}$ である. よって. $B_j \in \mathfrak{F}$ となり f_ε は $\mathfrak{F}$-単関数 #

② $|f_\varepsilon(s) - f(s)| < \varepsilon$ for all $s \in \mathfrak{S}$

∵) $\forall s \in \mathfrak{S}$ を固定: $f(s) \in \bigcup_{i=1}^{n} G_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ で. $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ は互いに素な集合から なるので $f(s)$ はどれか1つの A_{i_0} にだけ属する. よって. $s \in f^{-1}(A_{i_0}) = B_{i_0}$ にだけ 属する. よって. $f_\varepsilon(s) = a_{i_0}$. このとき $f(s), a_{i_0} \in A_{i_0}$. それゆえ $f(s), a_{i_0} \in G_{i_0}$ となる ので G_{i_0} が半径 ε の開球であることに注意すると

$$|f_\varepsilon(s) - f(s)| = |a_{i_0} - f(s)| < \varepsilon \quad \#$$

以上の①, ②より $f \in B(\mathfrak{S}, \mathfrak{F})$ となる □

ここで. この節でたびたび使う技術的な補題を準備しておく:

<u>(9.3) 補題</u>. $\mathfrak{S}$ は完全正則空間で. $\{K_i\}_{i=1}^{n}$ は互いに素なコンパクト集合 からなる族とする. このとき 次の性質を満たす開集合族 $\{H_i\}_{i=1}^{n}$ が存在する:

(a) $K_i \subset H_i \quad (1 \leq i \leq n)$

(b) $H_i \cap H_j = \phi \quad (i \neq j)$

(証明) n についての帰納法で示す.

<u>$n=2$ のとき</u>: K_1, K_2 は compact で $K_1 \cap K_2 = \phi$ とする. このとき 付章より

$\exists f \in C_b(\mathfrak{S})$; $0 \leq f \leq 1$, $f(K_1) = 0$, $f(K_2) = 1$

となる. ここで

$$V_1 := \{s \in S : f(s) < \tfrac{1}{2}\}, \quad V_2 := \{s \in S : f(s) > \tfrac{1}{2}\}$$

とおくと，f は連続ゆえ V_1, V_2 は open sets で $V_1 \cap V_2 = \phi$ となる．さらに $V_1 \supset K_1$ かつ $V_2 \supset K_2$ も明らか．よって，$n=2$ のとき成り立つ．

そこで n のとき成り立つと仮定する．

$n+1$ のとき：帰納法の仮定より $\exists \{V_i\}_{i=1}^{n} : V_i \cap V_j = \phi \ (i \neq j)$，$K_i \subset V_i$ で V_i は open sets であるとする．K_{n+1} と $K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ に対して，$n=2$ の場合の結果より $\exists V_{n+1} \supset K_{n+1}, \exists V \supset K$; $V_{n+1} \cap V = \phi$，V_{n+1}, V は open sets となる．そこで $H_i := V \cap V_i \ (i=1,2,\cdots,n)$; $H_{n+1} := V_{n+1}$ と置くと，$H_1, \cdots, H_{n+1}$ はすべて open sets で $H_i \supset K_i$ となる．さらに，$H_{n+1} \cap H_i = \phi \ (1 \leq i \leq n)$ かつ $H_i \cap H_j = \phi \ (i \neq j \,;\, i,j = 1,2,\cdots,n)$ である．ゆえに $\{H_i\}_{i=1}^{n+1}$ は (a), (b) を満たす開集合族となる．よって，$n+1$ のときも成り立つ．以上で証明が完了した □

以上までの議論で，次の定理を定式化し，証明するための準備が整った．

<u>(9.4) 定理.</u> S は完全正則空間，L は $C_b(S)$ 上の有界線形汎関数，$\mathcal{F}$ は S の開集合全体によって生成された集合体とする．このとき，次の2つの条件は同値：

(1) L は tightness の条件 (*) を満たす：

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon$: compact subset of S ;

$$|L(f)| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty \quad \text{for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K_\varepsilon) = 0$$

(2) $\mu \in ba(S, \mathcal{F})$ が存在して，μ は $\mathcal{F}$ 上で Radon であり

$$L(f) = \int_S f d\mu \quad \text{for all } f \in C_b(S)$$

が成り立つ．

このとき，(2)で存在する μ は一意的に定まる．さらに，対応

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) := \int_S f d\mu, \quad f \in C_b(S)$$

は等距離かつ線形で，$\mu \geq 0 \Leftrightarrow L_\mu \geq 0$ を満たす．

(証明) $\mu \in ba(S, \mathcal{F})$ が $\mathcal{F}$ 上で Radon であるとし，

$$L_\mu(f) := \int_S f d\mu, \quad f \in C_b(S)$$

とおく．命題9.2より L_μ は $C_b(S)$ 上の有界線形汎関数で，$\|L_\mu\| \leq \|\mu\|$ となる．また対応 $\mu \longmapsto L_\mu$ は明らかに線形である．

等距離性：$\|\mu\| \leq \|L_\mu\|$ を示せばよい．

$\forall \varepsilon > 0$ を固定して

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \geq \|\mu\| - \varepsilon \tag{1}$$

を満たす $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$ with $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ を選ぶ．μ は Radon なので各 A_i に対して $\exists K_i$: compact，$\exists U_i$: open ; $K_i \subset A_i \subset U_i$ かつ

$$|\mu|(U_i - K_i) \leq \frac{\varepsilon}{n} \tag{2}$$

とできる．このとき $\{U_i\}_{i=1}^n$ は互いに素とは限らないので，次の工夫を行う：

$K_1, K_2, \cdots, K_n$ に対して，補題9.3より $\exists \{H_i\}_{i=1}^n$: 開集合族 ; $K_i \subset H_i$

$(1\le i\le n)$ で $H_i\cap H_j=\phi\ (i\ne j)$. そこで, $G_i := V_i\cap H_i\ (1\le i\le n)$ と

置くと. $K_i\subset G_i$, $G_i\cap G_j=\phi\ (i\ne j)$, G_i は open set で

$$|\mu|(G_i-K_i)\le\frac{\varepsilon}{n} \qquad (3)$$

を満たす (ただし. G_i は必ずしも A_i を含まないことに注意).

S は完全正則なので 仮定より 各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して

$\exists f_i\in C_b(S)\ ;\ 0\le f_i\le 1,\ f_i(S-G_i)=0,\ f_i(K_i)=1$

となる. そこで $\alpha_i\mu(A_i)=|\mu(A_i)|$ となる α_i を選んで

$$f_0 := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i$$

と置く.

① $f_0\in C_b(S)$ で $\|f_0\|_\infty\le 1$.

∵) $f_0\in C_b(S)$ は明らか. $\forall s\in S$ を固定:

- $s\notin\bigcup_{i=1}^{n}G_i$ の場合: $s\notin G_i\ (1\le\forall i\le n)$ なので $f_i(s)=0$. $\therefore f_0(s)=0$
- $s\in\bigcup_{i=1}^{n}G_i$ の場合: $G_1,\cdots,G_n$ は互いに素なので s はどれか1つだけの G_{i_0}

に属し, $s\notin G_i\ (i\ne i_0)$ となる. よって $f_0(s)=\alpha_{i_0}\cdot f_{i_0}(s)$

$\therefore\ |f_0(s)|=|\alpha_{i_0}|\cdot|f_{i_0}(s)|=|f_{i_0}(s)|\le 1$.

以上より. $\|f_i\|_\infty\le 1$ #

② $|L_\mu(f_0)-\|\mu\||\le 3\varepsilon$.

∵) $L_\mu(f_0)-\|\mu\|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_{G_i}f_i\,d\mu-\|\mu\|$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu + \int_{K_i} f_i \, d\mu \right\} - \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| + \varepsilon \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu + \int_{K_i} 1 \, d\mu \right\} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) - \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu + \mu(K_i) - \mu(A_i) \right\} - \varepsilon$$

$$\geq - \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu - \mu(A_i - K_i) \right\} \right| - \varepsilon$$

$$\geq - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \left\{ \left| \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu \right| + |\mu(A_i - K_i)| \right\} - \varepsilon$$

$$\geq - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{G_i - K_i} |f_i| \, d|\mu| + |\mu|(A_i - K_i) \right\} - \varepsilon$$

$$\geq - \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\mu|(G_i - K_i) + |\mu|(A_i - K_i) \right\} - \varepsilon$$

$$\geq - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \right) - \varepsilon = -3\varepsilon.$$

同様に:

$$\|\mu\| - L_\mu(f_0) \leq \sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| + \varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{G_i} f_i \, d\mu$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{G_i} f_i \, d\mu$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \mu(A_i) - \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu - \mu(K_i) \right\}$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \mu(A_i - K_i) - \int_{G_i - K_i} f_i \, d\mu \right\}$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \left\{ |\mu(A_i - K_i)| + \int_{G_i - K_i} |f_i| \, d|\mu| \right\}$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \left\{ |\mu|(A_i - K_i) + |\mu|(G_i - K_i) \right\}$$

$$\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \right) = 3\varepsilon$$

以上より.

$$\left| L_\mu(f_0) - \|\mu\| \right| \leq 3\varepsilon \quad \#$$

ゆえに.

$$\|\mu\| \underset{\substack{\uparrow \\ ②}}{\leq} L_\mu(f_0) + 3\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \|f_0\|_\infty \leq 1}}{\leq} \|L_\mu\| + 3\varepsilon .$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると. $\|\mu\| \leq \|L_\mu\|$ が得られる #

順序保存性: 対応 $\mu \longmapsto L_\mu$ の線形性より $\mu \geq 0 \iff L_\mu \geq 0$, i.e., $L_\mu(f) \geq 0$ for all $f \in C_b(S)$ with $f \geq 0$ を示せばよい.

($\Rightarrow$) は. 積分の定義より明らか.

($\Leftarrow$) $\mu \geq 0$ でないと仮定すると. $\exists A \in \mathcal{F}, \exists \varepsilon > 0 ; \mu(A) < -\varepsilon < 0$ となる. μ は $\mathcal{F}$ 上で Radon なので $\exists K$: compact, $\exists G$: open ; $K \subset A \subset G$ で $|\mu|(G - K) < \frac{\varepsilon}{3}$ とできる. S は完全正則なので

$\exists g \in C_b(S)$; $0 \leq g \leq 1$, $g(S - G) = 0$, $g(K) = 1$

となる. このとき

③ $\left|\int_S g\,d\mu - \mu(A)\right| < \frac{2\varepsilon}{3}$.

$\because)$ $\left|\int_S g\,d\mu - \mu(A)\right| = \left|\int_{G-K} g\,d\mu + \int_K 1\,d\mu - \mu(A)\right|$

$\leq \int_{G-K} |g|\,d|\mu| + |\mu|(A-K) \leq 2|\mu|(G-K) < \frac{2\varepsilon}{3}$ #

よって. $\int_S g\,d\mu < \mu(A) + \frac{2\varepsilon}{3} < -\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3} = -\frac{\varepsilon}{3} < 0$

となり仮定に反する. ゆえに $\mu \geq 0$ である #

<u>一意性:</u> $\mu_1, \mu_2 \in ba(S, \mathcal{F})$ で共に $\mathcal{F}$ 上で Radon であり

$$\int_S f\,d\mu_1 = \int_S f\,d\mu_2 \quad \text{for all } f \in C_b(S)$$

と系5.4

であるとする. 以下で $\mu_1 = \mu_2$ on $\mathcal{F}$ となることを示す. そのためには命題5.2の証明と同様にして, すべての compact subset K of S に対して $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ となることを示せばよい. そこで $\forall K$: compact をとり固定:

- $K = S$ の場合; 仮定より

$$\mu_1(S) = \int_S 1\,d\mu_1 = \int_S 1\,d\mu_2 = \mu_2(S)$$

なので $\mu_1(K) = \mu_2(K)$

- $K \neq S$ の場合: $\forall \varepsilon > 0$ を固定. μ_1, μ_2 は共に $\mathcal{F}$ 上で Radon なので

$\exists G$: open subset of S; $G \supset K$ で $|\mu_1|(G-K) < \frac{\varepsilon}{2}$ かつ $|\mu_2|(G-K) < \frac{\varepsilon}{2}$.

S の完全正則性より. $\exists f_0 \in C_b(S)$; $0 \leq f_0 \leq 1$, $f_0(S-G)=0$, $f_0(K)=1$.

このとき. $\mu_1(K) = \int_K 1\, d\mu_1 = \int_S f_0\, d\mu_1 - \int_{G-K} f_0\, d\mu_1$

$$\mu_2(K) = \int_K 1\, d\mu_2 = \int_S f_0\, d\mu_2 - \int_{G-K} f_0\, d\mu_2.$$

仮定より. $\int_S f_0\, d\mu_1 = \int_S f_0\, d\mu_2$ なので

$$\mu_1(K) - \mu_2(K) = \int_{G-K} f_0\, d\mu_2 - \int_{G-K} f_0\, d\mu_1.$$

よって.

$$|\mu_1(K) - \mu_2(K)| \leq \left|\int_{G-K} f_0\, d\mu_2\right| + \left|\int_{G-K} f_0\, d\mu_1\right|$$

$$\leq |\mu_2|(G-K) + |\mu_1|(G-K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると. $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ が得られる #

以上の準備の下で (1) $\Leftrightarrow$ (2) を示す.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\forall \varepsilon > 0$ を固定: μ は S 上で Radon なので $\exists K_\varepsilon$: compact;

$|\mu|(S-K_\varepsilon) < \varepsilon$. よって. $\forall f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon) = 0$ に対して.

$$|L_\mu(f)| = \left|\int_S f\, d\mu\right| = \left|\int_{S-K_\varepsilon} f\, d\mu\right|$$

$$\leq \int_{S-K_\varepsilon} |f|\, d|\mu| \leq \|f\|_\infty \cdot |\mu|(S-K_\varepsilon) < \varepsilon \cdot \|f\|_\infty.$$

よって. tightness の条件(*)が成り立つ.

(1)⇒(2): $L \in C_b(S)^*$ で tightness の条件(*)を満たしているとする. そして.

$$L = L^+ - L^-, \quad L^+, L^- \in C_b(S)^* \text{ で } L^+, L^- \geq 0$$

と分解する.

- L^+, L^- は共に tightness の条件(*)を満たす.

∵) L^+ の場合に示す. L^- の場合も同様にして示せる. Banach 束の理論 (§1章参照) より, 各 $f \in C_b(S)$ with $f \geq 0$ に対して

$$L^+(f) = \sup\{L(g) : 0 \leq g \leq f, \ g \in C_b(S)\} \tag{4}$$

が成り立つ. $\forall \varepsilon > 0$ を固定し, K_ε は

$$|L(f)| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty \quad \text{for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K_\varepsilon) = 0 \tag{5}$$

を満たすコンパクト集合とする. そして. $\forall f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon) = 0$ を固定して $h = |f|$ と置くと. $h \in C_b(S)$, $h \geq 0$ で $h(K_\varepsilon) = 0$ となる. このとき, (4)より

$$L^+(h) = \sup\{L(g) : 0 \leq g \leq h, \ h \in C_b(S)\}$$

となるので, $\forall \delta > 0$ に対して $\exists g_\delta \in C_b(S)$ with $0 \leq g_\delta \leq h$; $L^+(h) - \delta < L(g_\delta)$ となる. ここで $g_\delta(K_\varepsilon) = 0$ なので (5)及び $\|g_\delta\|_\infty \leq \|h\|_\infty = \|f\|_\infty$ に注意すれば

$$L^+(h) - \delta < L(g_\delta) \leq |L(g_\delta)| \leq \varepsilon \|g_\delta\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$$

となる. ここで $\delta > 0$ は任意なので $\delta \to 0$ とすると. $L^+(|f|) \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$.

そして. $-|f| \leq f \leq |f|$ なので L^+ の正値性より. $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$.

よって $|L_2^+(f)| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$ となり，L_2^+ が tightness の条件 (*) を満たすことが示された ※

次に．$C_b(S)$ は $B(S)$ の vector sublattice なので，Banach 束における Hahn–Banach 定理（付章参照）より，L_1^+，L_2^+ の $B(S)$ 上への拡張 M_1，M_2 が存在して．$M_1, M_2 \in B(S)^*$ で．$M_1, M_2 \geq 0$ となる．系.8.8 より．この M_1, M_2 に対して $\exists \lambda_1, \exists \lambda_2 \in ba(S)$；

$$M_1(f) = \int_S f d\lambda_1, \quad M_2(f) = \int_S f d\lambda_2 \quad \text{for all } f \in B(S)$$

となる．

- $\lambda_1 \geq 0$ で．$M_1(f) = \int_S f d\lambda_1$ は次の tightness の条件 (*) を満たす：

(*) $\forall \varepsilon > 0$ に対して．$\exists K_\varepsilon$: compact subset of S；

$$|M_1(f)| = \left|\int_S f d\lambda_1\right| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty \quad \text{for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K_\varepsilon) = 0.$$

λ_2 についても同様．

∵) $\forall A$: subset of S に対して $f = \chi_A$ とおくと．$f \in B(S)$ で $f \geq 0$．よって．M_1 の正値性より．$0 \leq M_1(f) = \int_S \chi_A d\lambda_1 = \lambda_1(A)$．また．$M_1$ が (*) を満たすことは．M_1 が L_1 の拡張であることから明らか． ※

以上より．「任意の $\lambda \in ba(S)$ with $\lambda \geq 0$ に対して $M(f) := \int_S f d\lambda$ ($f \in B(S)$) が tightness の条件 (*) を満たせば．$\exists \mu \in ba(S, \mathcal{F})$；$\mu$ は $\mathcal{F}$ 上で Radon で

$$\int_S f\,d\lambda = \int_S f\,d\mu \quad \text{for all } f \in C_b(S) \qquad \cdots\cdots (☆)$$

が成り立つ」

ことを示せばすべての証明が完了する。

$\because$) 与えられた $L \in C_b(S)^*$ を $L = L^+ - L^-$ と分解し，それを $B(S)$ 上へ拡張したものを M_1, M_2 とし，それの表現測度を $\lambda_1, \lambda_2 \in ba(S)$ とする．この λ_1, λ_2 に対して，(☆)の条件を満たす μ_1, μ_2 が存在したとする．$\mu := \mu_1 - \mu_2$ と置くと，$\mu \in ba(S)$ で，S 上で Radon となることは明らか．そして，各 $f \in C_b(S)$ に対して

$$\begin{aligned} L(f) &= L^+(f) - L^-(f) = M_1(f) - M_2(f) \\ &= \int_S f\,d\lambda_1 - \int_S f\,d\lambda_2 = \int_S f\,d\mu_1 - \int_S f\,d\mu_2 = \int_S f\,d\mu. \end{aligned}$$

よって，μ が求める集合関数となる #

以下では (☆) が成り立つことを順を追って示す．

$\lambda \in ba(S)$ は $\lambda \geq 0$ で，$M(f) := \int_S f\,d\lambda \quad (f \in B(S))$ は tightness の条件(＊)を満たすと仮定する．

(第1段) 各コンパクト集合 K に対して

$$\mu_1(K) := \inf\{\lambda(G) : K \subset G \text{ で } G \text{ は open set}\}.$$

各 $E \subset S$ に対して

$$\mu_2(E) := \sup\{\mu_1(K) : K \subset E \text{ で } K \text{ は compact}\}$$

と置く．以下で μ_1, μ_2 の性質を調べる

(a) μ_1, μ_2 は非負，有界かつ単調増加．

∵) 定義より明らか #

(b) $\forall G_1$: open, $\forall K_1$: compact に対して

$$\mu_1(K_1) \leq \lambda(G_1) + \mu_1(K_1 - G_1) \tag{6}$$

∵) G は $G \supset K_1 - G_1$ を満たす open set とする．このとき $G_1 \cup G$ は open set で $K_1 \subset G_1 \cup G$ である．

∵) $s \in K_1$ とする．$s \notin G_1$ とすると $s \in K_1 - G_1$ ∴ $s \in G$．よって $s \in G_1 \cup G$ #

ゆえに，μ_1 の定義より

$$\mu_1(K_1) \leq \lambda(G_1 \cup G) \leq \lambda(G_1) + \lambda(G).$$

ここで G は $G \supset K_1 - G_1$ を満たす任意の open set なので，再び μ_1 の定義より

$\mu_1(K_1) \leq \lambda(G_1) + \mu_1(K_1 - G_1)$ が得られる #

(c) $\forall F$: closed に対して

$$\mu_1(K_1) \leq \mu_1(F \cap K_1) + \mu_2(K_1 - F) \tag{7}$$

が成り立つ．

∵) G_1 は $G_1 \supset F \cap K_1$ を満たす任意の開集合とすると，$K_1 - G_1$ はコンパクトで $K_1 - G_1 \subset K_1 - F$ となる

∵) $s \in K_1 - G_1$ とすると $s \in K_1$ かつ $s \notin G_1$．よって $s \notin F \cap K_1$．

ゆえに. $s \notin F$ または $s \notin K_1$. ところが $s \in K_1$ なので $s \notin F$ となる $\therefore s \in K_1 - F$ //

よって μ_2 の定義より $\mu_1(K_1 - G_1) = \mu_2(K_1 - G_1)$ なので. (6) と μ_2 の単調増加性より

$$\mu_1(K_1) \leq \lambda(G_1) + \mu_2(K_1 - F)$$

となる. G_1 は. $G_1 \supset F \cap K_1$ を満たす任意の open set なので. 上式と μ_1 の定義より.

$$\mu_1(K_1) \leq \mu_1(F \cap K_1) + \mu_2(K_1 - F)$$

が得られる //

(d) $\forall E \subset S$, $\forall F$: closed に対して

$$\mu_2(E) \leq \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E - F) \tag{8}$$

が成り立つ

$\because$) K_1 は $K_1 \subset E$ を満たす任意のコンパクト集合とする. このとき $F \cap K_1$ は compact で $F \cap K_1 \subset F \cap E$. よって μ_2 の定義より

$$\mu_1(F \cap K_1) \leq \mu_2(E \cap F).$$

一方. $K_1 - F \subset E - F$ で μ_2 は単調増加なので

$$\mu_2(K_1 - F) \leq \mu_2(E - F).$$

ゆえに. (7) より.

$$\mu_1(K_1) \leq \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E - F).$$

ここで K_1 は. $K_1 \subset E$ を満たす任意のコンパクト集合なので. 上式と μ_2 の定義より.

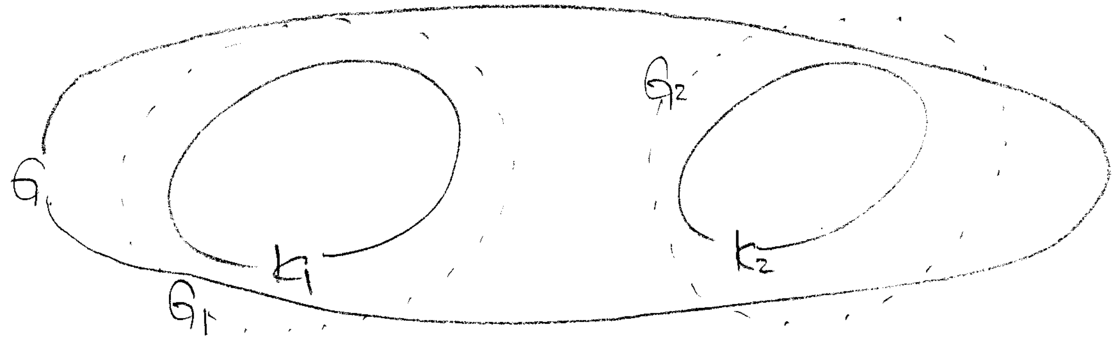
$\mu_2(E) \leq \mu_2(E \cap F) + \mu_2(F - F)$ が得られる //

(e) $\forall K_1, \forall K_2$: compact with $K_1 \cap K_2 = \phi$ に対して

$$\mu_1(K_1 \cup K_2) \geq \mu_1(K_1) + \mu_1(K_2) \qquad (9)$$

が成り立つ.

$\because$) $\forall K_1, \forall K_2$: compact sets with $K_1 \cap K_2 = \phi$ を固定: Sの完全正則性より $\exists G_1, \exists G_2$: open sets ; $G_1 \supset K_1$, $G_2 \supset K_2$ かつ $G_1 \cap G_2 = \phi$ とできる.



さて. Gは. $G \supset K_1 \cup K_2$ を満たす任意の開集合とする. このとき. $G \cap G_1$ と $G \cap G_2$ は互いに素で. $(G \cap G_1) \cup (G \cap G_2) \subset G$ なので. λの有限加法性より

$$\lambda(G) \geq \lambda((G \cap G_1) \cup (G \cap G_2)) = \lambda(G \cap G_1) + \lambda(G \cap G_2)$$

となる. ここで $G \cap G_1 \supset K_1$ で $G \cap G_1$は open set なので μ_1の定義より

$$\lambda(G \cap G_1) \geq \mu_1(K_1)$$

となる. 同様に $\lambda(G \cap G_2) \geq \mu_1(K_2)$. よって.

$$\lambda(G) \geq \mu_1(K_1) + \mu_1(K_2).$$

ここで Gは $G \supset K_1 \cup K_2$ を満たす任意の開集合なので μ_1の定義より

$\mu_1(K_1 \cup K_2) \geq \mu_1(K_1) + \mu_1(K_2)$ が得られる ※

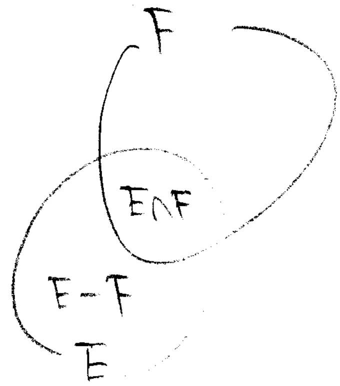
(f) $\forall E \subset \mathfrak{S}$, $\forall F$: closed に対して

$$\mu_2(E) \geq \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E - F)$$

が成り立つ.

∵) K_1, K_2 をそれぞれ $K_1 \subset E \cap F$, $K_2 \subset E - F$ を満たすコンパクト集合とする.

このとき $K_1 \cup K_2$ はコンパクトで $K_1 \cup K_2 \subset E$ なので,



μ_2の定義と(d)より,

$$\mu_2(E) \geq \mu_1(K_1 \cup K_2) \geq \mu_1(K_1) + \mu_1(K_2).$$

ここで K_1, K_2 は $K_1 \subset E \cap F$, $K_2 \subset E - F$ を満たす任意のコンパクト集合なので, 上式と μ_2の定義より

$\mu_2(E) \geq \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E - F)$ が得られる //

(g) $\forall E \subset \mathfrak{S}$ と $\forall F$: closed に対して

$$\mu_2(E) = \mu_2(E \cap F) + \mu_2(E \cap F^c)$$

が成り立つ.

∵) (d)と(f)より明らか //

(第2段) μの構成: μ_2の$\mathfrak{B}$上への制限をμとする.

(h) $\mu(\phi) = 0$ かつ $\mu_1(K) = \mu_2(K) = \mu(K)$ for all compact K

∵) ϕ は closed, compact かつ open なので μ_1, μ_2, μ の定義より

$$\underset{\phi\in\mathfrak{F}}{\mu(\phi)=}\ \underset{\phi\text{ は compact}}{\mu_2(\phi)=}\ \underset{\phi\text{ は open}}{\mu_1(\phi)=}\ \lambda(\phi)=0.$$

次に K は compact とすると

$$\mu(K)\underset{\substack{K\text{ は closed}\\ \text{それゆえ } K\in\mathfrak{F}}}{=}\mu_2(K)=\mu_1(K)$$

※

$\mathfrak{F}_\mu$ で μ-measurable set, i.e.,

$$\mu(E)=\mu(E\cap F)+\mu(E\cap F^c) \quad \text{for all } E\in\mathfrak{F}$$

を満たす $F\in\mathfrak{F}$ の全体を表すと, Dunford-Schwartz [; Lemma III.5.2] より $\mathfrak{F}_\mu$ は $\mathfrak{F}$ の部分集合体で, μ は $\mathfrak{F}_\mu$ 上で有限加法的である. さらに, (g) より $\mathfrak{F}_\mu$ は S の閉集合をすべて含んでいるので, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_\mu$ となる. よって μ は $\mathfrak{F}$ 上で定義された正値有限加法的な集合関数となる

(第3段) $\mu\in ba(S,\mathfrak{F})$ で, $\mathfrak{F}$ 上で Radon:

$\mu\in ba(S,\mathfrak{F})$ を示すには <u>有界性</u> を示せばよい. S は closed なので $\mu(S)=\mu_2(S)$. μ_2 の定義より, $\exists K$: compact; $\mu_2(S)<\mu_1(K)+1$

$$\therefore \mu(S)=\mu_2(S)<\mu_1(K)+1\underset{\substack{K\subset S\text{ で},\ S\text{ は open}\\ \text{なので }\mu_1\text{ の定義より}}}{\le}\lambda(S)+1\underset{\text{仮定より }\lambda\text{ は有界}}{<}\infty$$

Radon性：上で示したことからμは有界かつ正値なので、$\forall\varepsilon>0$, $\forall A\in\mathcal{F}$に対して$\exists K$: compact; $K\subset A$かつ$\mu(A-K)<\varepsilon$を示せばよい。

$\forall\varepsilon>0$, $\forall A\in\mathcal{F}$を固定：μ及びμ_2の定義より$\exists K$: compact; $A\subset K$で

$$\mu(A)-\mu_1(K)=\mu_2(A)-\mu_1(K)<\varepsilon$$

とできる。ここで(h)より$\mu_1(K)=\mu(K)$なので上式より

$$\mu(A-K)=\mu(A)-\mu(K)<\varepsilon$$

となる。ゆえにμは$\mathcal{F}$上でRadonとなる。

(才4段) $\displaystyle\int_S f\,d\lambda=\int_S f\,d\mu$ for all $f\in C_b(S)$ (10)

が成り立つ：

各$f\in C_b(S)$は

$$f=f^+-f^-,\quad f^+,f^-\geq 0 \text{ で } f^+,f^-\in C_b(S)$$

と分解できるので積分の線形性により、(10)が任意の$f\in C_b(S)$ with $f\geq 0$に対して成り立つことを示せば十分である。さらに各fは有界なので$0\leq f\leq 1$と仮定して一般性は失なわれない。よって以下では(10)を任意の$f\in C_b(S)$ with $0\leq f\leq 1$に対して示す。

$\forall f\in C_b(S)$ with $0\leq f\leq 1$を固定：$\forall\varepsilon>0$を固定して閉区間$[0,1]$の分割を、

$$0=u_0<u_1<u_2<\cdots<u_n=1 \text{ with } u_i-u_{i-1}<\frac{\varepsilon}{\mu(S)}\ (1\leq i\leq n)$$

とし.
$$E_1 := \{s \in S : 0 \leq f(s) \leq u_1\}$$
$$E_i := \{s \in S : u_{i-1} < f(s) \leq u_i\} \quad (2 \leq i \leq n)$$
と置く.

(i) 各 $E_i \in \mathfrak{F}$ で $E_i \cap E_j = \phi \ (i \neq j)$ かつ $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$

∵) E_i の定義よりすぐに明らか #

(j) $a_i := \inf_{s \in E_i} f(s) \quad (i=1,2,\cdots,n)$ とおくと. 各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して
$$f(s) < a_i + \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \quad \text{for all } s \in E_i.$$

∵) $\forall i=1,2,\cdots,n$ を固定: a_i の定義より
$$u_{i-1} \leq a_i \leq f(s) \leq u_i \quad \text{for all } s \in E_i$$
$$\therefore \ f(s) - a_i \leq u_i - u_{i-1} < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$
$$\therefore \ f(s) < a_i + \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \quad \text{for all } s \in E_i$$ #

(k) $$\int_S f\,d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) + \varepsilon. \qquad (11)$$

∵) $$\int_S f\,d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^{n} E_i} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\,d\mu.$$
$$\underset{(j)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} \left(a_i + \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\right) d\mu.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\right)\mu(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{\mu(S)}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(E_i) + \varepsilon \qquad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\mu(S)$$

#

よって、μ は S 上で Radon なので $\exists K_i$: compact ; $K_i \subset E_i$ かつ

$$\mu(E_i) < \mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{n}.$$

これを (11) に代入すると $0 \le a_i \le 1$ に注意すれば

$$\int_S f\,d\mu \le \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) + \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(K_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \varepsilon$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(K_i) + 2\varepsilon \tag{12}$$

となる。

(b) $G_i \supset K_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ なる互いに素な開集合からなる族 $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ が存在して

$$b_i := \inf_{s\in G_i} f(s) \ge a_i - \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \quad (1\le i\le n) \tag{13}$$

∵) 補題9.3より、$U_i \supset K_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を満たす互いに素な開集合からなる族 $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ が存在する。$\forall i=1,2,\cdots,n$ を固定；f の連続性で、各 $t\in K_i$ に対して $\exists V_i(t)$: t の開近傍；

$$s\in V_i(t) \text{ ならば } |f(s)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$

とである. そこで

$$\overline{V}_i := \bigcup_{t \in K_i} \overline{V}_i(t)$$

と置くと, $\overline{V}_i \supset K_i$ で $\overline{V}_i$ は open set となる. そこで $G_i := V_i \cap \overline{V}_i$ と置くと,

G_i は open set で $G_i \supset K_i$ となる. さらに $V_1, \cdots, V_n$ は互いに素なので, $G_1, \cdots,$

G_n も互いに素となる. よって 以下では. この $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ に対して (13) が成り立つこと

を示す.

$s \in G_i$ とする. このとき $s \in \overline{V}_i$ なので $\exists t_0 \in K_i$; $s \in \overline{V}_i(t_0)$. それゆえ.

$$|f(s) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}.$$

$$\therefore f(s) > f(t_0) - \frac{\varepsilon}{\mu(S)} \geq \inf_{t \in K_i} f(t) - \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$

$K_i \subset E_i$ ゆえ.

$$\geq \inf_{t \in E_i} f(t) - \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$

$$= a_i - \frac{\varepsilon}{\mu(S)}.$$

ここで $s \in G_i$ は任意ゆえ

$$b_i := \inf_{s \in G_i} f(s) \geq a_i - \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$

が成り立つ ※

(m) $$\int_S f\,d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(G_i) + 3\varepsilon \qquad (14)$$

$\because$) (12) に (13) を代入すると

$$\int_S f\,d\mu \le \sum_{i=1}^{n}\left(b_i+\frac{\varepsilon}{\mu(S)}\right)\mu(K_i)+2\varepsilon$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(b_i+\frac{\varepsilon}{\mu(S)}\right)\mu(G_i)+2\varepsilon$$

$K_i \subset G_i$ ゆえ

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i\mu(G_i)+\frac{\varepsilon}{\mu(S)}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}G_i\right)+2\varepsilon$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} b_i\mu(G_i)+3\varepsilon \quad \#$$

(n) 任意の開集合 G に対して $\mu(G)\le\lambda(G)$

$\because$) $\forall G$: open set を固定 : $G\in\mathcal{F}$ なので $\mu(G)=\mu_2(G)$.

$\forall\varepsilon>0$ を固定. μ_2 の定義より. $\exists K$: compact with $K\subset G$; $\mu(G)-\mu_1(K)<\varepsilon$.

$\therefore \mu(G)-\varepsilon<\mu_1(K)$. ここで $K\subset G$ で G は open なので μ_1 の定義より.

$\mu_1(K)\le\lambda(G)$. 以上より. $\mu(G)-\varepsilon<\lambda(G)$. ここで $\varepsilon>0$ は任意なので

$\varepsilon\to 0$ とすると. $\mu(G)\le\lambda(G)$ が得られる #

よって. 以上の議論より.

$$\int_S f\,d\lambda \ge \int_{\bigcup_{i=1}^{n}G_i} f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n}\int_{G_i} f\,d\lambda$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n}\int_{G_i} b_i\,d\lambda$$

$b_i=\inf_{s\in G_i} f(s)$ ゆえ.

$$= \sum_{i=1}^{n} b_i\lambda(G_i)$$

(n) より.

$$\ge \sum_{i=1}^{n} b_i\mu(G_i).$$

よって (14) より.

$$\int_S f d\mu \leq \int_S f d\lambda + 3\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると上式より.

$$\int_S f d\mu \leq \int_S f d\lambda$$

が得られる. 以上より. $\forall f \in C_b(S)$ with $0 \leq f \leq 1$ に対して

$$\int_S f d\mu \leq \int_S f d\lambda \qquad (15)$$

となることが示された.

次に. $\forall f \in C_b(S)$ with $0 \leq f \leq 1$ に対して

$$\int_S f d\lambda \leq \int_S f d\mu \qquad (16)$$

となることを示す. この際に. $M(f) = \int_S f d\lambda$ ($f \in B(S)$) が tightness の条件(＊)を満たすことを利用してまず次の事実を示す.

(0) $\mu(S) = \lambda(S)$

∵) (15) より. $\mu(S) \leq \lambda(S)$ である. よって逆向きの $\lambda(S) \leq \mu(S)$ を示す.

$\forall \varepsilon > 0$ を固定: 仮定より. $M(f) = \int_S f d\lambda$ ($f \in B(S)$) は tightness の条件(＊)を満たすので. $\exists K$: compact ;

$$|M(f)| = \left|\int_S f d\lambda\right| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty \quad \text{for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K) = 0 \qquad (17)$$

が成り立つ.

$\forall G$: 開集合 with $G \supset K$ を固定 : S の完全正則性より.

$\exists f_0 \in C_b(S)$; $0 \leq f_0 \leq 1$, $f_0(S-G)=1$ かつ $f_0(K)=0$.

この f_0 に対して (17) より.

$$\left|\int_S f_0 d\lambda\right| < \varepsilon \cdot \|f_0\|_\infty \leq \varepsilon$$

が成り立つ. ここで

$$\left|\int_S f_0 d\lambda\right| = \int_S f_0 d\lambda = \int_{S-G} f_0 d\lambda + \int_{G-K} f_0 d\lambda + \int_K f_0 d\lambda$$

$$= \lambda(S-G) + \int_{G-K} f_0 d\lambda$$

$$\geq \lambda(S-G) = \lambda(S) - \lambda(G)$$

となる. よって.

$$\lambda(S) - \varepsilon \leq \lambda(G).$$

ここで $G \supset K$ は任意の開集合なので 上式と μ_1 の定義と (h) より.

$$\lambda(S) - \varepsilon \leq \mu_1(K) = \mu(K) \leq \mu(S).$$

上式は. $\forall \varepsilon > 0$ に対して成り立つので $\varepsilon \to 0$ とすると $\lambda(S) \leq \mu(S)$ が得られる #

次に, 以下で証明を完成させる.

$\forall f \in C_b(S)$ with $0 \leq f \leq 1$ を固定 : $g = 1-f$ と置くと $g \in C_b(S)$ with $0 \leq g \leq 1$ となるので, (15) より.

$$\int_S (1-f) d\mu = \int_S g d\mu \leq \int_S g d\lambda = \int_S (1-f) d\lambda$$

となる. よって. $\mu(S)=\lambda(S)$ に注意すると.

$$\mu(S)-\int_S f\,d\mu \le \lambda(S)-\int_S f\,d\lambda$$

$$\therefore \int_S f\,d\lambda \le \int_S f\,d\mu.$$

となり. (16) が示された. よって. (15) と (16) より. $\forall f \in C_b(S)$ with $0 \le f \le 1$ に対して

$$\int_S f\,d\lambda = \int_S f\,d\mu.$$

となり. 証明が完了した. □

§10. Riesz–Markov–Kakutani の定理の拡張.

この§では、§9の結果を用いて、コンパクト Hausdorff 空間 S 上の有界連続実数全体からなる Banach 空間 $C_b(S)$ 上の有界線形汎関数の S 上の Radon 実測度による表現定理として有名な Riesz–Markov–Kakutani の定理を、S が完全正則空間の場合に拡張する.

<u>(10.1) 記号.</u> 以下、この§を通じて

S : Hausdorff 空間

$C_b(S)$: S 上の有界、連続な実数値関数全体の作る Banach 束

ノルム : $\|f\|_\infty := \sup_{s\in S}|f(s)|$

順序 : $f\le g \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f(s)\le g(s)$ for all $s\in S$

束構造 : $(f\vee g)(s) := \max(f(s), g(s))$

$(f\wedge g)(s) := \min(f(s), g(s))$

$C_b(S)^*$: $C_b(S)$ 上の有界線形汎関数全体の作る Banach 束

ノルム : $\|L\| := \sup_{\|f\|_\infty\le 1}|L(f)|$

順序 : $L\le M \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} L(f)\le M(f)$ for all $f\in C_b(S)$ with $f\ge 0$

束構造 : $(L\vee M)(f) := \sup\{L(g)+M(f-g) : 0\le g\le f\}$

$(L\wedge M)(f) := \inf\{L(g)+M(f-g) : 0\le g\le f\}$

ただし. $f\in C_b(S)$ with $f\geq 0$.

$ca(S)$: S上のBorel実測度全体からなるBanach束

ノルム: $\|\mu\| := |\mu|(S)$

順序: $\mu\le\nu \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mu(A)\le\nu(A)$ for all $A\in\mathcal{B}(S)$

束構造: $(\mu\vee\nu)(A) = \sup\{\mu(E)+\nu(A-E) : E\in\mathcal{B}(S), E\subset A\}$

$(\mu\wedge\nu)(A) = \inf\{\mu(E)+\nu(A-E) : E\in\mathcal{B}(S), E\subset A\}$

($ca(S)$がBanach束となることの証明は Swartz[; p.226]を見よ).

<u>(10.2) 命題</u> $M_t(S)$をS上のRadon実測度全体とすると. $M_t(S)$は. Banach束$ca(S)$の閉部分空間かつ部分束である. それ故. $M_t(S)$はそれ自身でBanach束となる.

(証明) Radon実測度の1次結合はRadon実測度となるので 線形部分空間であることは明らか

<u>閉であること:</u> $\mu_n\in M_t(S)$, $\mu\in ca(S)$で $\|\mu_n-\mu\|\to 0$ とする. このとき. μが Radonであることを示せばよい. $\forall A\in\mathcal{B}(S)$, $\forall\varepsilon>0$を固定: $\exists n_0\in\mathbb{N}$; $\|\mu-\mu_{n_0}\|\le\varepsilon/2$ となる. ここでμ_{n_0}はRadonだから. $\exists K$: compact; $K\subset A$ かつ $|\mu_{n_0}|(A-K)<\varepsilon/2$. 以上より.

$$|\mu|(A-K) \leq |\mu-\mu_{n_0}|(A-K) + |\mu_{n_0}|(A-K)$$
$$\leq \|\mu-\mu_{n_0}\| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに μ は Radon となる $\#$

部分束であること: $\mu \in M_t(S)$ とする. Banach 束 $ca(S)$ における正部分, 負部分をそれぞれ μ^+, μ^- とすると $\mu = \mu^+ - \mu^-$ かつ $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ となる (Jordan 分解定理). μ は Radon で, $0 \leq \mu^+, \mu^- \leq |\mu|$ なので μ^+, μ^- は共に Radon. それゆえ $\mu^+, \mu^- \in M_t(S)$. この事実から, 一般の上限, 下限に関して $M_t(S)$ が閉じていることは次のように示される:

$\mu, \nu \in M_t(S)$ とする. このとき, $\mu \vee \nu = (\mu-\nu)^+ + \nu$, $\mu \wedge \nu = -\{(-\mu) \vee (-\nu)\}$ なので, $\mu \vee \nu, \mu \wedge \nu \in M_t(S)$ となる.

以上より, $M_t(S)$ は $ca(S)$ の部分束となる $\#$

以上で $M_t(S)$ はそれ自身で Banach 束であることが示された □

(11.3) 定義. $L \in C_b(S)^*$ とする.

L が tightness の条件 (T) を満たす

$\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$: compact subset of S;

$|L(f)| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$ for all $f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon) = 0$.

(10.4) 命題. $\Phi := \{L \in C_b(S)^* : L$ は tightness の条件(*)を満たす$\}$ とおくと, Φ は Banach 束 $C_b(S)^*$ の閉部分束である. それ故 Φ はそれ自身で Banach 束となる.

(証明) Φ が $C_b(S)^*$ の線形部分空間であることは明らか.

閉であること: $L_n \in \Phi$, $L \in C_b(S)^*$ で $\|L_n - L\| \to 0$ とする.

$\forall \varepsilon > 0$ を固定: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\|L - L_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ここで L_{n_0} は tightness の条件(*)を満たすので, $\exists K_\varepsilon$: compact;

$$|L_{n_0}(f)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|f\|_\infty \quad \text{for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K_\varepsilon) = 0$$

となる. そこで $\forall f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon) = 0$ を固定: このとき

$$
\begin{aligned}
|L(f)| &= |L(f) - L_{n_0}(f) + L_{n_0}(f)| \\
&\leq |(L - L_{n_0})(f)| + |L_{n_0}(f)| \\
&\leq \|L - L_{n_0}\| \cdot \|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|f\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|f\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|f\|_\infty = \varepsilon \cdot \|f\|_\infty .
\end{aligned}
$$

よって L は tightness の条件(*)を満たす. ゆえに $L \in \Phi$. よって Φ は closed.

部分束であること: 命題10.2の証明と同様に, 任意の $L \in \Phi$ に対して $L^+ \in \Phi$ となることを示せばよい. ところがこの事実は定理9.4の(1)⇒(2)の証明の冒頭で示されている. //

以上で証明が完了した. □

<u>(10.5) 定理</u>. S は完全正則空間、L は $C_b(S)$ 上の有界線形汎関数とする。このとき次の2つの条件は同値:

(1) L は tightness の条件 (*) を満たす:

(*) $\forall_{\varepsilon>0}, \exists K_\varepsilon$: compact subset of S;

$$|L(f)| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty \text{ for all } f \in C_b(S) \text{ with } f(K_\varepsilon) = 0.$$

(2) $\exists \mu \in M_R(S)$;

$$L(f) = \int_S f d\mu \text{ for all } f \in C_b(S)$$

が成り立つ。

このとき、(2) で存在する μ は一意に定まる。さらに、対応

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) := \int_S f d\mu, \quad f \in C_b(S)$$

により、$M_R(S)$ と Ξ は Banach 束として等距離同型である。

(証明) (1) ⇒ (2): $\mathcal{F}$ は S のすべての閉集合により生成される集合体とすると定理9.4より、$\lambda \in ba(S, \mathcal{F})$ が存在して、λ は $\mathcal{F}$ 上で Radon で

$$L(f) = \int_S f d\lambda \quad \text{for all } f \in C_b(S)$$

が成り立つ。定理7.3より λ の $\mathcal{B}(S)$ 上への Radon 拡張 μ が存在する。このとき

- $\int_S f d\lambda = \int_S f d\mu$ for all $f \in C_b(S)$.

∵) $^\forall f \in C_b(S)$ を固定：命題9.2の証明より，$^\exists f_n$：可一単関数列；
$\|f-f_n\|_\infty \to 0$．μ は λ の拡張なので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\int_S f_n d\lambda = \int_S f_n d\mu$
となる．命題8.6と命題9.2より証明すべき式の両辺は共に f に関して
$\|\cdot\|_\infty$-連続なので

$$\int_S f d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu$$

となる #

以上より，上で構成した μ は $M_t(S)$ に属し

$$L(f) = \int_S f d\mu \quad \text{for all } f \in C_b(S)$$

を満たすことが示された．

(2) ⇒ (1)：$^\forall \varepsilon > 0$ を固定：μ は Radon なので $^\exists K_\varepsilon$: compact subset of S;
$|\mu|(S-K_\varepsilon) < \varepsilon$．よって $^\forall f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon)=0$ に対して

$$|L_\mu(f)| = \left|\int_S f d\mu\right| = \left|\int_{S-K_\varepsilon} f d\mu\right|$$
$$\leq \int_{S-K_\varepsilon} |f| d|\mu| \leq \|f\|_\infty \cdot |\mu|(S-K_\varepsilon) < \varepsilon \cdot \|f\|_\infty .$$

また $L_\mu \in C_b(S)^*$ となることは命題9.2より明らか．

<u>一意性</u>：$\mu_1, \mu_2 \in M_t(S)$ で

$$\int_S f d\mu_1 = \int_S f d\mu_2 \quad \text{for all } f \in C_b(S)$$

とする．μ_1, μ_2 は Radon，それゆえ 正則なので 系.5.5 より．$\mu_1 = \mu_2$ on $\mathcal{B}(S)$ が得られる．よって一意性が示された \#．

以上より，残っている仕事は 対応 $\mu \in \mathcal{M}(S) \longmapsto L_\mu \in \Phi$ により，$\mathcal{M}(S)$ と Φ が Banach束として同型となることである．そのためには，$\|L_\mu\| = |\mu|(S)$ 及び．$\mu \geq 0 \Leftrightarrow L_\mu \geq 0$ を示せばよい．以下で，これらを示す：

- $\|L_\mu\| = |\mu|(S)$ であること：

各 $f \in C_b(S)$ に対して

$$| L_\mu(f) | = \left| \int_S f d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \cdot |\mu|(S)$$

$\therefore \|L_\mu\| \leq |\mu|(S)$．

次に $^\forall \varepsilon > 0$ を固定：このとき $\exists \{E_i\}_{i=1}^n$：S の $\mathcal{B}(S)$-可測分割；

$$|\mu|(S) - \varepsilon < \sum_{i=1}^n |\mu(E_i)| \tag{1}$$

とできる．μ は Radon なので 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\exists K_i：コンパクト；K_i \subset E_i \text{ かつ } |\mu|(E_i - K_i) < \frac{\varepsilon}{2n} \tag{2}$$

となる．

① $\exists \{G_i\}_{i=1}^n$：開集合族 with $K_i \subset G_i$ かつ $G_i \cap G_j = \phi$ $(i \neq j)$；

$$|\mu|(G_i - K_i) < \frac{\varepsilon}{n} \tag{3}$$

$\because$) 補題 9.3 より．$U_i \supset K_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を満たす 互いに素な 開集合から

なる族 $\{U_i\}_{i=1}^n$ が存在する. 一方, μ は Radon だから, 各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して

$\exists H_i$: 開集合 ; $E_i \subset H_i$ かつ $|\mu|(H_i - E_i) < \frac{\varepsilon}{2n}$

とできる. $G_i := U_i \cap H_i$ と置くと, $U_1, \cdots, U_n$ は互いに素なので, $G_1, \cdots, G_n$ も互いに

素で, $G_i \supset K_i$ となる. また明らかに G_i は open set で

$$|\mu|(G_i - K_i) \leq |\mu|(H_i - K_i)$$
$$\leq |\mu|(H_i - E_i) + |\mu|(E_i - K_i)$$
$$< \frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{n} \quad \#$$

よって, 上で構成した $\{K_i\}_{i=1}^n$, $\{G_i\}_{i=1}^n$ に対して 補題より

$\exists f_i \in C_b(S)$; $0 \leq f_i \leq 1$, $f_i(K_i) = 1$, $f_i(S - G_i) = 0$

となる. そこで $a_i \mu(E_i) = |\mu(E_i)|$ を満たす実数 a_i を選んで

$$f_\varepsilon := \sum_{i=1}^n a_i f_i \in C_b(S)$$

とおくと

② $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$

$\because)$ $\forall s \in S$ を固定:

- $s \notin \bigcup_{i=1}^n G_i$ の場合: $s \notin G_i$ for $1 \leq \forall i \leq n$ $\therefore f_i(s) = 0$ for $1 \leq \forall i \leq n$

  $\therefore f_\varepsilon(s) = 0$

- $s \in \bigcup_{i=1}^n G_i$ の場合: $G_1, \cdots, G_n$ は互いに素なので, s はどれか1つの G_{i_0} に属

に属する. $\therefore\ |f_\varepsilon(s)| = |a_{i_0} f_{i_0}(s)| = |f_{i_0}(s)| \le 1$

以上より. $\|f_\varepsilon\|_\infty \le 1$. ＃

③ $\left|\int_S f_\varepsilon \, d\mu\right| \ge |\mu|(S) - 2\varepsilon$.

∵) $K := \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ と置くと.

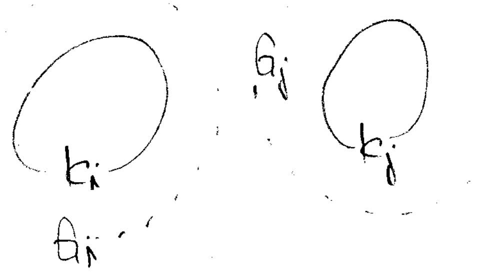
$$\left|\int_S f_\varepsilon \, d\mu\right| = \left|\int_K f_\varepsilon \, d\mu + \int_{S-K} f_\varepsilon \, d\mu\right| \ge \left|\int_K f_\varepsilon \, d\mu\right| - \left|\int_{S-K} f_\varepsilon \, d\mu\right| \qquad (4)$$

ここで

$$\left|\int_K f_\varepsilon \, d\mu\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} f_\varepsilon \, d\mu\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_j \int_{K_i} f_j \, d\mu\right| = (*)$$

ここで $i \ne j$ のとき. $K_i \subset S - G_j$ なので $f_j(K_i) = 0$

となる. それ故



$$\begin{aligned}
(*) &= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \int_{K_i} f_i \, d\mu\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(K_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \{\mu(E_i) - \mu(E_i - K_i)\}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) - \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i - K_i)\right| \\
&\ge \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)| - \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i - K_i)\right| \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\geq |\mu|(G) - \varepsilon - \sum_{i=1}^{n} |\mu|(E_i - K_i)$$
$$\geq |\mu|(G) - \varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} \qquad (2)$$
$$= |\mu|(G) - \frac{3\varepsilon}{2}$$

以上より

$$\left| \int_K f_\varepsilon \, d\mu \right| \geq |\mu|(G) - \frac{3\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

となる.

一方. $G - K = \bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{i=1}^{n} K_i = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i - K_i)$ (互いに素な和)

∵) $s \in$ (左辺) とすると. $s \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ∴ $s \notin K_i$ for $1 \leq {}^\forall i \leq n$

一方. $s \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ∴ $\exists i_0 ; s \in E_{i_0}$ ∴ $s \in E_{i_0} - K_{i_0}$ ∴ $s \in$ (右辺).

逆に. $s \in$ (右辺) とする. $E_1, \cdots, E_n$ は互いに素なので $E_1 - K_1, \cdots, E_n - K_n$

も互いに素. よって s はどれか1つの $E_{i_0} - K_{i_0}$ にだけ属する. よって.

$s \in E_{i_0}$ かつ $s \notin E_i$ $(i \neq i_0)$ で $s \notin K_{i_0}$. ここで $E_i \supset K_i$ なので

$s \notin K_i$ $(i \neq i_0)$. よって. $s \notin K_i$ for $1 \leq {}^\forall i \leq n$ ∴ $s \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

一方. $s \in E_{i_0}$ なので $s \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. ∴ $s \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i - \bigcup_{i=1}^{n} K_i =$ (左辺) #

よって.

$$\left| \int_{G-K} f_\varepsilon \, d\mu \right| \leq \|f_\varepsilon\|_\infty \cdot |\mu|(G - K)$$
$$\leq |\mu|\left(\bigcup_{i=1}^{n} (E_i - K_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} |\mu|(E_i - K_i)$$
$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

よって、(4), (5)より、

$$\left|\int_S f_\varepsilon d\mu\right| \geq |\mu|(S) - \frac{3\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = |\mu|(S) - 2\varepsilon \quad \#$$

ゆえに ②, ③より、

$$\|L\mu\| \underset{②}{\geq} \left|\int_S f_\varepsilon d\mu\right| \underset{③}{\geq} |\mu|(S) - 2\varepsilon$$

$$\therefore \|L\mu\| \geq |\mu|(S) - 2\varepsilon$$

上式で $\varepsilon > 0$ は任意なので $\varepsilon \to 0$ とすると $\|L\mu\| \geq |\mu|(S)$ となる。

• $\mu \geq 0 \Leftrightarrow L\mu \geq 0$ であること：

($\Rightarrow$) は積分の定義より明らか。よって ($\Leftarrow$) を示す。

$\exists A_0 \in \mathcal{B}(S), \exists \varepsilon_0 > 0$; $\mu(A_0) < -\varepsilon_0 < 0$ と仮定すると、μ の Radon 性より、$\exists K$: compact, $\exists G$: open ; $K \subset A_0 \subset G$ かつ $|\mu|(G-K) < \frac{\varepsilon_0}{4}$ となる。

S の完全正則性より $\exists f \in C_b(S)$; $0 \leq f \leq 1$, $f(K) = 1$ かつ $f(S-G) = 0$.

このとき、

$$\left|\int_S f d\mu - \mu(A_0)\right| = \left|\int_K f d\mu + \int_{G-K} f d\mu - \mu(A_0)\right|$$

$$= \left|\mu(K) - \mu(A_0) + \int_{G-K} f d\mu\right|$$

$$\leq |\mu|(A_0 - K) + |\mu|(G-K) < \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\therefore \int_S f d\mu - \mu(A_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\therefore L_\mu(f) = \int_S f d\mu < \mu(A_0) + \frac{\varepsilon_0}{2} < -\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} = -\frac{\varepsilon_0}{2} < 0$$

これは L_μ が positive であることに反する #

以上で定理のすべての証明が完了した □

従来の Riesz-Markov-Kakutani の定理は、定理10.5の自明な系として得られる.

(10.6) 系. (Riesz-Markov-Kakutani の定理). S はコンパクト Hausdorff 空間とする. このとき, $M_+(S)$ と $C_b(S)^*_+$ は対応

$$\mu \longmapsto L_\mu(f) := \int_S f d\mu, \quad \mu \in C_b(S)$$

に関して Banach 束として等距離同型となる.

(証明) S がコンパクトなので, すべての $L \in C_b(S)^*_+$ は tightness の条件 (*) を満たす. よって定理10.5から導びかれる □

§11. 測度の弱収束 — Portmanteau Theorem

この§では、位相空間上のBorel測度の全体から成る空間上に"測度の弱収束"の概念を導入し、その基本的性質を調べる。特に、測度の弱収束と同値な様々な条件を一つの定理にまとめたPortmanteau Theorem（寄せ集めの定理）がこの§の中心的話題である。

<u>(11.1) 記号</u>　以下、この§を通じて

S : 完全正則空間

$\mathcal{B}(S)$: S の Borel σ-集合体

$M(S)$: S 上の Borel 測度全体

$M_\tau(S)$: S 上の τ-正則な Borel 測度全体

$C_b(S)$: S 上の実数値有界連続関数全体の作る実Banach空間

with $\|f\|_\infty := \sup_{s \in S} |f(s)|$

$|\nu|$: S 上の Borel 実測度 ν の<u>全変動</u> (total variation), i.e.,

$$|\nu|(B) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(B_i)| : \begin{array}{l}\{B_i\}_{i=1}^{n} \text{ は } B \text{ の } \mathcal{B}(S)\text{-有限} \\ \text{可測分割}\end{array} \right\}, \quad B \in \mathcal{B}(S)$$

$\|\nu\| := |\nu|(S)$: ν の<u>全変動ノルム</u> (total variation norm)

δ_s : $s \in S$ に質量をもつ Dirac 測度, i.e., $\delta_s(A) := \chi_A(s)$, $A \in \mathcal{B}(S)$

我々の目的は「$M(S)$上にSの位相構造と整合した，すなわち，$s_\alpha \to s$ in S ならば $\delta_{s_\alpha} \to \delta_s$ in $M(S)$，となる的な収束概念を $M(S)$上に導入する」ことである．次の例は，全変動ノルムによる収束は我々の求めている収束概念には不向きであることを例示している．

<u>(11.2)例.</u> $S = \mathbb{R}$, $\mu_n := \delta_{\frac{1}{n}}$, $\mu := \delta_0$ とする．このとき，$\frac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{R}$ であるが，

$$\|\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0\| = |\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0|(\mathbb{R}) \geq |\delta_{\frac{1}{n}}(\{0\}) - \delta_0(\{0\})| = |0 - 1| = 1$$

である．

<u>(11.3)定義</u>（測度の弱収束）$\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset M(S)$ はネットで，$\mu \in M(S)$ とする．このとき，

μ_α が μ に<u>弱収束する</u>（weak convergence）（$\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ とかく）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $f \in C_b(S)$ に対して $\displaystyle \lim_{\alpha\in\Gamma} \int_S f\,d\mu_\alpha = \int_S f\,d\mu$.

"測度の弱収束"，"測度の各点収束"，"測度の全変動ノルム"による収束の間には一般に次の関係がある．

<u>(11.4) 命題</u> $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset M(S)$ はネット，$\mu \in M(S)$ として，次の3つの条件を考える：

(1) $\|\mu_\alpha - \mu\| \to 0$

(2) 各 $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して $\mu_\alpha(A) \to \mu(A)$

(3) $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$

このとき、(1) ⇒ (2) ⇒ (3) が成り立つ.

(証明) (1) ⇒ (2) は次の不等式より明らか.

$$|\mu_\alpha(A) - \mu(A)| \leq \|\mu_\alpha - \mu\| \quad \text{for } \forall A \in \mathcal{B}(S)$$

∵) $A \in \mathcal{B}(S)$ とする

$$\|\mu_\alpha - \mu\| = |\mu_\alpha - \mu|(S)$$
$$\geq |(\mu_\alpha - \mu)(A)| + |(\mu_\alpha - \mu)(S - A)|$$
$$= |\mu_\alpha(A) - \mu(A)| \quad \#$$

(2) ⇒ (3): $f \in C_b(S)$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ を固定. f は Borel 可測かつ有界なので

$\exists f_\varepsilon$: $\mathcal{B}(S)$-可測単関数; $\sup_{s \in S} |f(s) - f_\varepsilon(s)| < \varepsilon$. このとき

$$\left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right| \leq \int_S |f - f_\varepsilon| d\mu_\alpha + \left| \int_S f_\varepsilon d\mu_\alpha - \int_S f_\varepsilon d\mu \right| + \int_S |f_\varepsilon - f| d\mu.$$

$$\leq \varepsilon \mu_\alpha(S) + \varepsilon \cdot \mu(S) + \left| \int_S f_\varepsilon d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right|$$

ここで. 仮定より. $\mu_\alpha(S) \to \mu(S)$ かつ $\int_S f_\varepsilon d\mu_\alpha \to \int_S f d\mu$ なので.

上式より.

$$\limsup_{\alpha \in P} \left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right| \le 2\varepsilon \cdot \mu(S).$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ が得られる □

<u>(11.5) 反例</u>　命題11.4 の (1) ⇒ (2) ⇒ (3) の逆はすべて一般には成立しない。

(反例の構成) <u>(3) $\not\Rightarrow$ (2) の例</u>: $S = \mathbb{R}$, $\mu_n := \delta_{\frac{1}{n}}$, $\mu := \delta_0$ と置く。

このとき、各 $f \in C_b(\mathbb{R})$ に対して、

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n = f\left(\tfrac{1}{n}\right) \to f(0) = \int_{\mathbb{R}} f d\mu \qquad \therefore \mu_n \xrightarrow{w} \mu$$

ところが、$A = \{0\}$ に対して $\mu_n(A) = \delta_{\frac{1}{n}}(\{0\}) = 0$, $\mu(A) = \delta_0(\{0\}) = 1$

$\therefore \mu_n(A) \not\to \mu(A)$.

<u>(2) $\not\Rightarrow$ (1) の例</u>: $S = \mathbb{R}$ とし、各 $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_m(s) := \begin{cases} 1 + \sin(2\pi m s) & \text{if } s \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_0(s) := \begin{cases} 1 & \text{if } s \in [0,1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_m(A) := \int_A f_m(s) ds, \quad \mu(A) := \int_A f_0(s) ds, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

とおくと. μ_n, μ は $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度 (実際は確率測度) である.

① $\mu_n(A) \to \mu(A)$

$\because$)
$$\mu_n(A) = \int_0^1 \chi_A(s)\{1 + \sin(2\pi n s)\}ds = \int_0^1 \chi_A(s)ds + \int_0^1 \chi_A(s)\sin(2\pi n s)ds$$

一方.

$$\mu(A) = \int_0^1 \chi_A(s)ds.$$

ここで Fourier 級数論で有名な Riemann − Lebesgue の補題により

$$\int_0^1 \chi_A(s)\sin(2\pi n s)ds \to 0$$

となる. よって. $\mu_n(A) \to \mu(A)$ #

次に. $B_n := \{s \in [0,1] : \sin(2\pi n s) \geq 0\}$ と置く.

②. $$B_n = \underbrace{\left[0, \frac{1}{2n}\right] \cup \left[\frac{2}{2n}, \frac{3}{2n}\right] \cup \left[\frac{4}{2n}, \frac{5}{2n}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{2n-2}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right]}_{n\text{個の区間の和集合}}$$

$\because$) $\omega = 2\pi n s$ と置くと. $0 \leq s \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \omega \leq 2\pi n$. 区間 $[0, 2\pi n]$ の中で

$\sin\omega \geq 0$ となる区間は. 次の n 個の区間である:

$0 \leq \omega \leq \pi \iff 0 \leq s \leq \frac{1}{2n}$

$2\pi \leq \omega \leq 3\pi \iff \frac{2}{2n} \leq s \leq \frac{3}{2n}$

⋮

$(2n-2)\pi \leq \omega \leq (2n-1)\pi \iff \frac{2n-2}{2n} \leq s \leq \frac{2n-1}{2n}$ #

③ $\mu_n(B_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$, $\mu(B_n) = \frac{1}{2}$ for $\forall n \in \mathbb{N}$

∵)

$$\mu(B_n) = \mu\left(\left[0, \tfrac{1}{2n}\right]\right) + \mu\left(\left[\tfrac{2}{2n}, \tfrac{3}{2n}\right]\right) + \cdots + \mu\left(\left[\tfrac{2n-2}{2n}, \tfrac{2n-1}{2n}\right]\right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2n}} 1\,ds + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} 1\,ds + \cdots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} 1\,ds$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\text{個}} = \frac{1}{2n} \times n = \frac{1}{2}$$

一方,

$$\mu_n(B_n) = \mu_n\left(\left[0, \tfrac{1}{2n}\right]\right) + \mu_n\left(\left[\tfrac{2}{2n}, \tfrac{3}{2n}\right]\right) + \cdots + \mu_n\left(\left[\tfrac{2n-2}{2n}, \tfrac{2n-1}{2n}\right]\right)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2n}} (1 + \sin(2\pi n s))\,ds + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} (1 + \sin(2\pi n s))\,ds$$

$$+ \cdots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} (1 + \sin(2\pi n s))\,ds$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2n}} \sin(2\pi n s)\,ds + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} \sin(2\pi n s)\,ds + \cdots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} \sin(2\pi n s)\,ds}_{n\text{個}}$$

ここで 一般に $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して,

$$\int_{\frac{2(k-1)}{2n}}^{\frac{2k-1}{2n}} \sin(2\pi n s)\,ds \;\underset{2\pi n\,ds = dt}{\overset{2\pi n s = t}{=\!=\!=}}\; \frac{1}{2\pi n} \int_{2\pi(k-1)}^{\pi(2k-1)} \sin t\,dt$$

s	$\frac{2(k-1)}{2n} \to \frac{2k-1}{2n}$
t	$2\pi(k-1) \to \pi(2k-1)$

$$= \frac{1}{2\pi n}\Big[-\cos x\Big]_{2\pi(k-1)}^{2\pi k-\pi} = \frac{1}{2\pi n}\Big\{-\underbrace{\cos(2\pi k-\pi)}_{\substack{\parallel \\ -1}}+\underbrace{\cos(2\pi(k-1))}_{\substack{\parallel \\ 1}}\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\times 2 = \frac{1}{\pi n}$$

以上より.

$$\mu_n(B_n) = \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} + \cdots + \frac{1}{\pi n}}^{n\text{個}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \quad //$$

④. $\|\mu_n - \mu\| \not\to 0$

∵) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して.

$$\|\mu_n - \mu\| \geq |\mu_n(B_n) - \mu(B_n)| = \left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{\pi} \quad //$$

以上で反例が構成された □

<u>(11.6)定理</u> (Portmanteau Theorem) $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in P} \subset M(S)$ のネットで $\mu \in M(S)$ の τ-正則とする (S が距離空間の場合には τ-正則性は不要). このとき, 次の4つの条件は同値:

(1) $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$.

(2) $\mu_\alpha(S) \to \mu(S)$ かつ, 任意の閉集合 $F \subset S$ に対して

$$\limsup_{\alpha\in P} \mu_\alpha(F) \leq \mu(F)$$

(3) $\mu_\alpha(S) \to \mu(S)$ かつ 任意の開集合 $G \subset S$ に対して

$$\mu(G) \leq \liminf_{\alpha\in P} \mu_\alpha(G)$$

(4) 任意の <u>μ-連続集合</u> $B \in \mathcal{B}(S)$, i.e., $\mu(\partial B) = 0$ なる B に対して.

$$\lim_{\alpha \in T} \mu_\alpha(B) = \mu(B)$$

(証明) (オ1段) Sが距離空間の場合に示す。この際、μのT-正則性は仮定しない。

(1)⇒(2): $\mu_\alpha(S) = \int_S 1 \, d\mu_\alpha \to \int_S 1 \, d\mu = \mu(S)$ である。

次に F は closed subset of S とする。$\forall \varepsilon > 0$ を固定:

$$F^\varepsilon := \{ s \in S : d(s, F) < \varepsilon \}$$

$$f_\varepsilon(s) := \frac{d(s, (F^\varepsilon)^c)}{d(s, F) + d(s, (F^\varepsilon)^c)}, \quad s \in S$$

と置く ($d(s,F) = d(s,(F^\varepsilon)^c) = 0$ となる $s \in S$ は存在しないので定義は well-defined)

① $f_\varepsilon \in C_b(S)$, $0 \le f_\varepsilon \le 1$, $f_\varepsilon(s) = 1 \Leftrightarrow s \in F$, $f_\varepsilon(s) = 0 \Leftrightarrow s \in (F^\varepsilon)^c$

∵) 前の2つの主張は明らか。

$$f_\varepsilon(s) = 1 \Leftrightarrow d(s, F) = 0 \Leftrightarrow s \in F$$

$$f_\varepsilon(s) = 0 \Leftrightarrow d(s, (F^\varepsilon)^c) = 0 \Leftrightarrow s \in (F^\varepsilon)^c \quad \#$$

このとき、

$$\mu_\alpha(F) = \int_F 1 \, d\mu_\alpha \underset{\substack{\uparrow \\ f_\varepsilon(s) = 1 \text{ on } F}}{=} \int_F f_\varepsilon \, d\mu_\alpha \le \int_S f_\varepsilon \, d\mu_\alpha$$

$$\int_S f_\varepsilon d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ f_\varepsilon = 0 \text{ on } (F^\varepsilon)^c}}{=} \int_{F^\varepsilon} f_\varepsilon d\mu \le \int_{F^\varepsilon} 1\, d\mu = \mu(F^\varepsilon)$$

ここで仮定より. $\int_S f_\varepsilon d\mu_\alpha \longrightarrow \int_S f d\mu$ なので

$$\limsup_{\alpha\in P} \mu_\alpha(F) \le \limsup_{\alpha\in P} \int_S f_\varepsilon d\mu_\alpha = \int_S f_\varepsilon d\mu \le \mu(F^\varepsilon)$$

$$\therefore\ \limsup_{\alpha} \mu_\alpha(F) \le \mu(F^\varepsilon)$$

$\varepsilon>0$ は任意なので $\varepsilon = 1/n$ と置くと. $F^{\frac{1}{n}} \downarrow F$. よって. μ の単調減少列的連続性より $\mu(F^{\frac{1}{n}}) \downarrow \mu(F)$ となる. よって. 上式より.

$$\limsup_{\alpha} \mu_\alpha(F) \le \mu(F)$$

(2) ⇔ (3) は 補集合を考えれば容易に示せる.

(2) & (3) ⇒ (4) : $B \in \mathcal{B}(S)$ は $\mu(\partial B) = 0$ を満たすとする. このとき.

$$\limsup_{\alpha} \mu_\alpha(B) \underset{\substack{\uparrow \\ B\subset \overline{B}}}{\le} \limsup_{\alpha} \mu_\alpha(\overline{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{B}\text{ は closed}}}{\le} \mu(\overline{B}) \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{B} = B\cup\partial B}}{=} \mu(B)$$

一方.

$$\liminf_{\alpha} \mu_\alpha(B) \ge \liminf_{\alpha} \mu_\alpha(B^\circ) \underset{\substack{\uparrow \\ B^\circ\text{ は open}}}{\ge} \mu(B^\circ) \underset{\substack{\uparrow \\ B^\circ = B - \partial B}}{=} \mu(B)$$

よって，$\lim_{\alpha \in \Gamma} \mu_\alpha(B) = \mu(B)$ が得られる．

(4)⇒(1)：$f \in C_b(\mathfrak{S})$，$\varepsilon > 0$ とする．このとき，次の条件を満たす a, b，

$r_0, r_1, \cdots, r_k$ が存在する：

(i) $a < \inf_{s \in \mathfrak{S}} f(s)$，$b > \sup_{s \in \mathfrak{S}} f(s)$

(ii) $a = r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{i-1} < r_i < \cdots < r_k = b$

(iii) $r_i - r_{i-1} < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$

(iv) $\mu(\partial B_i) = 0$，ただし，$B_i := \{s \in \mathfrak{S} : r_{i-1} \leq f(s) < r_i\} \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$

∵) まず，$\mu(\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r\}) > 0$ となる r は高々可算個しかないことを注意する ……(☆)

∵) $Q := \{r \in \mathbb{R} : \mu(\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r\}) > 0\}$，

$Q_n := \{r \in \mathbb{R} : \mu(\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r\}) > \frac{1}{n}\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$

とおくと，Q_n は有限集合である．

∵) $r_1, r_2, \cdots, r_k$ を Q_n の異なる要素とすると $\mu(\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r_i\}) > \frac{1}{n}$

で，$\{\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r_i\}\}_{i=1}^{k}$ は互いに素である．よって

$$\frac{k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} < \sum_{i=1}^{k} \mu(\{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r_i\})$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \{s \in \mathfrak{S} : f(s) = r_i\}\right) \leq \mu(\mathfrak{S})$$

∴ $k < n \cdot \mu(\mathfrak{S})$．よって，$Q_n$ の異なる要素は有限個である．#

ここで $Q=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ なので Q は高々可算である #

まず，$r<\inf_{s\in\mathfrak{S}} f(s)$ を満たす r で $\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r\})=0$ となるものが (※)より必ず存在する．そこで，これを $r_0=a$ とする．次に，区間 $(r_0+\frac{\varepsilon}{2}, r_0+\varepsilon)$ の中にも，(※)より，$\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r\})=0$ となるものが必ず存在するので これを r_1 とする．この操作を次々に繰り返せば (ii), (iii) 及び $\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_i\})=0$ となる $r_2, r_3, \cdots$ が選べる．しかも．

$r_i-r_{i-1}>\frac{\varepsilon}{2}$ なので，有限回繰り返せば必ず $\sup_{s\in\mathfrak{S}} f(s)<r$ かつ $\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r\})=0$ となる r が見つかる．これを $r_k=b$ とする．

ここで，f は連続なので

$$\partial B_i \subset \{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_{i-1}\}\cup\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_i\}$$

$\because$) f の連続性より．

$$\overline{B_i}\subset\{s\in\mathfrak{S}:r_{i-1}\leq f(s)\leq r_i\}$$

一方，$B_i^c=\{s\in\mathfrak{S}:f(s)<r_{i-1}\}\cup\{s\in\mathfrak{S}:f(s)\geq r_i\}$

$$\therefore \overline{B_i^c}=\overline{\{s\in\mathfrak{S}:f(s)<r_{i-1}\}}\cup\overline{\{s\in\mathfrak{S}:f(s)\geq r_i\}}$$

$$\subset\{s\in\mathfrak{S}:f(s)\leq r_{i-1}\}\cup\{s\in\mathfrak{S}:f(s)\geq r_i\}$$

f の連続性

$$\therefore \partial B_i=\overline{B_i}\cap\overline{B_i^c}\subset\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_{i-1}\}\cup\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_i\}$$ #

$$\therefore 0\leq\mu(\partial B_i)\leq\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_{i-1}\})+\mu(\{s\in\mathfrak{S}:f(s)=r_i\})=0$$

よって. $\mu(\partial B_i)=0$ となり. 求める $r_0, r_1, \cdots, r_k$ が得られた #

さて. $g := \sum_{i=1}^{k} r_{i-1} \chi_{B_i}$ とおく.

① $|g(s)-f(s)| < \varepsilon$ for all $s \in S$

∵) $s \in S$ を固定: このとき. $r_0 = a < f(s) < b = r_k$ なので. $\exists i_0$;

$r_{i_0-1} \leq f(s) < r_{i_0}$ とできる. $\therefore s \in B_{i_0}$. よって. $g(s) = r_{i_0-1}$. ゆえに

$$|g(s)-f(s)| = |r_{i_0-1} - f(s)| < r_{i_0} - r_{i_0-1} < \varepsilon \quad \#$$

以上により. $\forall \alpha \in P$ に対して. ①に注意すると.

$$\left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right|$$

$$= \left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S g d\mu_\alpha + \int_S g d\mu_\alpha - \int_S g d\mu + \int_S g d\mu - \int_S f d\mu \right|$$

$$\leq \left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S g d\mu_\alpha \right| + \left| \int_S g d\mu_\alpha - \int_S g d\mu \right| + \left| \int_S g d\mu - \int_S f d\mu \right|$$

$$\leq \int_S |f-g| d\mu_\alpha + \int_S |g-f| d\mu + \left| \sum_{i=1}^{k} r_{i-1} \mu_\alpha(B_i) - \sum_{i=1}^{k} r_{i-1} \mu(B_i) \right|$$

$$\leq \varepsilon \mu_\alpha(S) + \varepsilon \cdot \mu(S) + \sum_{i=1}^{k} |r_{i-1}| \, |\mu_\alpha(B_i) - \mu(B_i)|$$

ここで各 B_i は. (iv) より μ-連続集合なので $\mu_\alpha(B_i) \to \mu(B_i)$. 一方.

$\partial S = \phi$ なので S は μ-連続集合. それゆえ. $\mu_\alpha(S) \to \mu(S)$. よって.

上式より

$$\limsup_{\alpha\in P} \left| \int_S f d\mu_\alpha - \int_S f d\mu \right| \leq 2\varepsilon\cdot\mu(S)$$

$\varepsilon>0$ は任意なので $\lim_{\alpha\in P}\int_S f d\mu_\alpha = \int_S f d\mu$. それゆえ. $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ が得られる □

(第2段) S が完全正則空間の場合

(2)⇔(3)⇒(4)⇒(1) の証明は. 距離空間の場合の証明と同じ. よって.

(1)⇒(2) だけを示せばよい. その際に. μ の τ-正則が用いられる:

F は closed subset of S とし,

$\Phi := \{ f : f: S\to[0,1]$ は連続で $f^{-1}(\{0\})\supset F$ を満たす$\}$

とおくと.

① Φ は実数に対する通常の大小関係に関して上に有向な半順序集合.

∵) Φ が半順序であることは明らか.

<u>上に有向であること</u>: $f_1, f_2\in\Phi$ とし, $f_3 := \max(f_1, f_2)$ とおくと.

$f_3: S\to[0,1]$ で連続で. $f_3^{-1}(\{0\})\supset F$ を満たす. よって. $f_3\in\Phi$.

② $\{f^{-1}(\{0\})\}_{f\in\Phi}$ は S の閉集合からなる単調減少 net で $\bigcap_{f\in\Phi} f^{-1}(\{0\}) = F$

∵) $\{f^{-1}(\{0\})\}_{f\in\Phi}$ が S の閉集合からなる単調減少 net であることは明らか.

そこで $\bigcap_{f\in\Phi} f^{-1}(\{0\}) = F$ を示す. Φ の定義より. "$\supset$" は明らか. ゆえに "$\subset$"

を示す. $s\notin F$ とすると. S の完全正則性より

$\exists f_0 \in C_b(S)$; $0 \leq f_0 \leq 1$, $f_0(s) = 1$ かつ $f_0(F) = 0$

$\therefore F \subset f_0^{-1}(\{0\})$ $\therefore f_0 \in \Phi$. ところが $s \notin f_0^{-1}(\{0\})$

$\therefore s \notin \bigcap_{f \in \Phi} f^{-1}(\{0\})$ $\therefore$ $\bigcap_{f \in \Phi} f^{-1}(\{0\}) \subset F$ が示された #

③ $\forall f \in \Phi$ に対して. $\mu_\alpha \circ f^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ f^{-1}$. ただし. $\mu_\alpha \circ f^{-1}(A) := \mu_\alpha(f^{-1}(A))$,

$\mu \circ f^{-1}(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\because$) $g \in C_b(\mathbb{R})$とすると. 積分の変数変換の公式より.

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_\alpha \circ f^{-1} = \int_S g \circ f \, d\mu_\alpha, \quad \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu \circ f^{-1} = \int_S g \circ f \, d\mu.$$

仮定より. $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ で. $g \circ f \in C_b(S)$なので

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_\alpha \circ f^{-1} = \int_S g \circ f \, d\mu_\alpha \longrightarrow \int_S g \circ f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu \circ f^{-1}$$

$\therefore \mu_\alpha \circ f^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ f^{-1}$ #

以上の①,②,③より. $\forall f \in \Phi$ に対して.

$$\limsup_{\alpha \in P} \mu_\alpha(F) \leq \limsup_{\alpha \in P} \mu_\alpha(f^{-1}(\{0\})) \quad \because) \ F \subset f^{-1}(\{0\})$$
$$= \limsup_{\alpha \in P} \mu_\alpha \circ f^{-1}(\{0\})$$
$$\leq \mu \circ f^{-1}(\{0\}) \quad \because) \ \mu_\alpha \circ f^{-1} \xrightarrow{w} \mu \circ f^{-1} \text{なので } S = \mathbb{R} \text{ の場合の結果より}$$
$$= \mu(f^{-1}(\{0\}))$$

ここで μ は τ-正則なので $\lim_{f \in \Phi} \mu(f^{-1}(\{0\})) = \mu(F)$.

以上より、

$$\liminf_{\alpha\in\Gamma} \mu_\alpha(F) \leq \mu(F)$$

となる。以上ですべての証明が完了した □

次の命題は、この章で定義した測度の弱収束の概念は $\mathfrak{S}$ の位相と整合性をもつ, i.e., $s_\alpha \to s$ in $\mathfrak{S}$ ならば $\delta_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \delta_s$ in $M(\mathfrak{S})$ という我々の目的にかなう性質をもっていることを示している。

(11.7) 命題 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset \mathfrak{S}$ はネットで $s \in \mathfrak{S}$ とする。このとき

$$s_\alpha \to s \text{ in } \mathfrak{S} \iff \delta_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \delta_s \text{ in } M(\mathfrak{S})$$

(証明) ($\Longrightarrow$) $f \in C_b(\mathfrak{S})$ とすると、f は連続なので $f(s_\alpha) \to f(s)$。よって、

$$\int_{\mathfrak{S}} f d\delta_{s_\alpha} = f(s_\alpha) \to f(s) = \int_{\mathfrak{S}} f d\mu_s \quad \therefore \delta_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \delta_s.$$

($\Longleftarrow$) $\delta_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \delta_s$ in $M(\mathfrak{S})$ と仮定する。$s_\alpha \not\to s$ in $\mathfrak{S}$ と仮定すると、

$\exists G$: 開集合, $\exists$ 部分net $\{s_\beta\}_{\beta\in\Delta}$ of $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$;

$$s \in G \text{ かつ } s_\beta \notin G \text{ for all } \beta \in \Delta$$

$\because$) $s_\alpha \not\to s$ in $\mathfrak{S}$ なので、$\exists$ 開集合 $G \ni s$;

$$\forall \alpha\in\Gamma, \exists \beta\in\Gamma ; \beta \geq \alpha \text{ かつ } s_\beta \notin G \quad \cdots (*)$$

となる。そこで $\Delta := \{\beta\in\Gamma : s_\beta \notin G\}$ とおくと、$\Gamma \neq \phi$ なので $\Delta \neq \phi$ で、

① Δは上に有向な半順序集合

∵) $\Delta \subset \Gamma$なので半順序であることは明らか.

<u>上に有向であること</u>: $\beta_1, \beta_2 \in \Delta$とすると, $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma$で $s_{\beta_1}, s_{\beta_2} \notin G$.
Γは上に有向なので $\exists \alpha_3 \in \Gamma$; $\beta_1, \beta_2 \leq \alpha_3$. この$\alpha_3$に対して(*)より
$\exists \beta_3 \in \Gamma$; $\beta_3 \geq \alpha_3$ かつ $s_{\beta_3} \notin G$. それゆえ $\beta_3 \in \Delta$で明らかに $\beta_3 \geq \beta_1, \beta_2$.
ゆえに Δは上に有向 #

② $\{s_\beta\}_{\beta \in \Delta}$は$\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$の部分net

∵) $\forall \alpha_0 \in \Gamma$を固定: このとき(*)より $\exists \beta_0 \in \Gamma$; $\beta_0 \geq \alpha_0$ かつ $s_{\beta_0} \notin G$.
$\therefore \beta_0 \in \Delta$. さらに, $\beta \geq \beta_0$ ならば $\beta \geq \alpha_0$. よって $\{s_\beta\}_{\beta \in \Delta}$は$\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$
の部分netとなる(部分netの定義における写像$\varphi: \Delta \to \Gamma$は恒等写像)
#

$s \in G$なので, Sの完全正則性より, $\exists f \in C_b(S)$; $0 \leq f \leq 1$,
$f(s)=0$, $f(S-G)=1$とできる. それゆえ,

$$\int_S f\, d\delta_{s_\beta} = f(\underset{S-G}{\underset{\cap}{s_\beta}}) = 1, \qquad \int_S f\, d\delta_s = f(s) = 0$$

よって, $\int_S f\, d\delta_{s_\beta} \not\to \int_S f\, d\delta_s$. $\therefore \delta_{s_\beta}$は$\delta_s$に弱収束しない.

ところが仮定より, $\delta_{s_\alpha} \xrightarrow{w} \delta_s$で$\{\delta_{s_\beta}\}_{\beta \in \Delta}$は$\{\delta_{s_\alpha}\}_{\alpha \in \Gamma}$の部分netなので

$\delta_{s_\beta} \xrightarrow{w} \delta_s$ となる．これは矛盾！ よって．$s_\alpha \to s$ in $\mathfrak{S}$ となる $\square$

§12 測度の弱収束 — その他の判定条件

この§では与えられた測度のネットがその厚い集合(thick set)上への制限が弱収束するための十分条件を与える。ここで与えられる条件は応用上よく用いられる。

(12.1) 記号 S : Hausdorff空間

$M^+(S)$: S上のBorel測度の全体

$M_\tau^+(S)$: S上のτ-正則なBorel測度全体

(12.2) 補題 (inclusion-exclusion formula, Halmos [; p.40]).

Ωは空でない集合、$\mathcal{A}$はΩの部分集合からなる集合体、$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$は有限加法的とする。このとき、任意の$A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathcal{A}$に対して

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{\{i\} \in Q_1^m} \mu(A_i)$$

$$+ (-1) \sum_{\{i_1, i_2\} \in Q_2^m} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ (-1)^2 \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in Q_3^m} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3})$$

$$\vdots$$

$$+ (-1)^{m-2} \sum_{\{i_1, \cdots, i_{m-1}\} \in Q_{m-1}^m} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m-1}})$$

$$+ (-1)^{m-1} \sum_{\{i_1, \cdots, i_m\} \in Q_m^m} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m})$$

が成り立つ．ただし，$\mathcal{Q}_k^m$ $(1 \leq k \leq m)$ は要素が k 個からなる $\{1, 2, \cdots, m\}$ の部分集合全体を表す．

（証明）数学的帰納法で示す．$m=2$ のときは明らかに成り立つ．

m のとき成り立つと仮定：$m+1$ のとき，$A := \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ と置くと

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = \mu(A \cup A_{m+1}) = \mu(A) + \mu(A_{m+1}) - \mu(A \cap A_{m+1}) \qquad (1)$$

ここで帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap A_{m+1}) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap A_{m+1})\right) \\
&= \sum_{\{i\} \in \mathcal{Q}_1^m} \mu(A_i \cap A_{m+1}) \\
&\quad + (-1) \sum_{\{i_1, i_2\} \in \mathcal{Q}_2^m} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{m+1}) \\
&\quad + (-1)^2 \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in \mathcal{Q}_3^m} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{m+1}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{m-2} \sum_{\{i_1, \cdots, i_{m-1}\} \in \mathcal{Q}_{m-1}^m} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{m-1}} \cap A_{m+1}) \\
&\quad + (-1)^{m-1} \sum_{\{i_1, \cdots, i_m\} \in \mathcal{Q}_m^m} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} \cap A_{m+1})
\end{aligned}$$

この式と $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)$ の展開式を (1) に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \left\{ \sum_{\{i\} \in \mathcal{Q}_1^m} \mu(A_i) + \mu(A_{m+1}) \right\} \\
&\quad + (-1) \left\{ \sum_{\{i_1, i_2\} \in \mathcal{Q}_2^m} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{\{i\} \in \mathcal{Q}_1^m} \mu(A_i \cap A_{m+1}) \right\}
\end{aligned}$$

$$+(-1)^2\left\{\sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\in Q_3^m}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})+\sum_{\{i_1,i_2\}\in Q_2^m}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{m+1})\right\}$$

$$\vdots$$

$$+(-1)^{m-1}\left\{\sum_{\{i_1,\cdots,i_m\}\in Q_m^m}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m})+\sum_{\{i_1,\cdots,i_{m-1}\}\in Q_{m-1}^m}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{m-1}}\cap A_{m+1})\right\}$$

$$+(-1)^m\sum_{\{i_1,\cdots,i_m\}\in Q_m^m}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m}\cap A_{m+1}).$$

$$=\sum_{\{i\}\in Q_1^{m+1}}\mu(A_i)$$

$$+(-1)\sum_{\{i_1,i_2\}\in Q_2^{m+1}}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2})$$

$$+(-1)^2\sum_{\{i_1,i_2,i_3\}\in Q_3^{m+1}}\mu(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3})$$

$$\vdots$$

$$+(-1)^{m-1}\sum_{\{i_1,\cdots,i_m\}\in Q_m^{m+1}}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_m})$$

$$+(-1)^m\sum_{\{i_1,\cdots,i_{m+1}\}\in Q_{m+1}^{m+1}}\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{m+1}})$$

となる. よって. $m+1$ のときも成り立つ $\square$

<u>(12.3) 命題</u>. S は完全正則空間, $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in D}\subset M^+(S)$ はネット, $\mu\in M^+_\tau(S)$ とする. $\mathcal{H}$ は S の開基底で有限積に関して閉じているとする. このとき. 各 $H\in\mathcal{H}$ に対して $\mu_\alpha(H)\to\mu(H)$ ならば $\mu_\alpha\xrightarrow{w}\mu$.

(証明) $\mathcal{H}_1$ は $\mathcal{H}$ に属する有限和全体からなる族とする.

① 各 $H\in\mathcal{H}_1$ に対して $\mu_\alpha(H)\to\mu(H)$.

∵) $\forall H \in \mathcal{H}_1$ を固定: $H = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$ (各 $H_i \in \mathcal{H}$) と表される. このとき, 補題12.2 (inclusion-exclusion formula) と $\mathcal{H}$ が有限積に関して閉じていることから

$\mu_\alpha(H) = \mu_\alpha(\bigcup_{i=1}^{n} H_i) \longrightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} H_i) = \mu(H)$ //

さて, $^\forall G$: open subset of S を固定して,

$$\mathcal{H}_G := \{H \in \mathcal{H}_1 : H \subset G\}$$

とおく

② $\mathcal{H}_G$ は通常の集合の包含関係に関して有向集合. それゆえ, $\{H\}_{H \in \mathcal{H}_G}$ は S の開集合からなる単調増大ネット. さらに $\bigcup_{H \in \mathcal{H}_G} H = G$.

∵) $\mathcal{H}_G$ が半順序集合であることは明らか.

<u>有向集合であること</u>: $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_G$ とすると $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_1$ で $H_1, H_2 \subset G$. $\mathcal{H}_1$ は有限和に関して閉じているので $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}_1$ で, $H_1 \cup H_2 \subset G$.

∴ $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}_G$. ゆえに $\mathcal{H}_G$ は上に有向 //

<u>$\bigcup_{H \in \mathcal{H}_G} H = G$ であること</u>: "$\subset$" は明らか. よって "$\supset$" を示す.

$\forall s \in G$ を固定: $\mathcal{H}$ が S の開基底なので $\mathcal{H}_1$ も S の開基底である. よって, $\exists H \in \mathcal{H}_1$; $s \in H \subset G$. よって $H \in \mathcal{H}_G$ で $s \in H$. ∴ $s \in \bigcup_{H \in \mathcal{H}_G} H$ //

③ 各 $H \in \mathcal{H}_G$ に対して $\mu(H) \leq \liminf_{\alpha \in P} \mu_\alpha(G)$.

$\because)\ \mu(H) \underset{①}{=} \lim_{\alpha\in P} \mu_\alpha(H) = \liminf_{\alpha\in P} \mu_\alpha(H) \underset{\underset{H\subset G}{\uparrow}}{\leq} \liminf_{\alpha\in P} \mu_\alpha(G)$ //

よって仮定より μ は T-正則なので ② より $\mu(G) = \lim_{H\in \mathcal{A}_G} \mu(H)$. よって ③ より $\mu(G) \leq \liminf_{\alpha\in P} \mu_\alpha(G)$ となる. ゆえに定理11.6 (Portmanteau theorem) より $\mu_\alpha \overset{w}{\Rightarrow} \mu$ となる □

次に測度を部分集合上に制限する演算が測度の弱収束に関して連続であることを示す. そのためにまず Borel 測度の厚い集合 (thick set) 上への制限によって得られる Borel 測度について説明する.

<u>(12.4) 命題</u>. S は Hausdorff 空間、$S_0 \subset S$ とする

(1) $\mathcal{B}(S_0) = \mathcal{B}(S) \cap S_0$

(2) 特に $S_0 \in \mathcal{B}(S)$ の場合は. $\mathcal{B}(S_0) = \{A \in \mathcal{B}(S) : A \subset S_0\}$

(証明) (1) $\mathcal{G}$ を S の開集合族とする. S の S_0 上への相対位相の開集合族は $\mathcal{G} \cap S_0$ であるので. $\mathcal{B}(S_0) = \sigma(\mathcal{G} \cap S_0) \underset{\underset{付録参照}{\uparrow}}{=} \sigma(\mathcal{G}) \cap S_0 = \mathcal{B}(S) \cap S_0$.

(2) $S_0 \in \mathcal{B}(S)$ とする. $A \in \mathcal{B}(S_0)$ とすると. (1) より $A = B \cap S_0$ for $\exists B \in \mathcal{B}(S)$.

$\therefore A \in \mathcal{B}(S)$ で $A \subset S_0$ $\therefore A \in$ (右辺).

逆に $A \in$ (右辺) とすると $A \in \mathcal{B}(S)$ で $A \subset S_0$. $\therefore A = A \cap S_0 \in \mathcal{B}(S) \cap S_0 = \mathcal{B}(S_0)$

□

(12.5) 定義. S は Hausdorff 空間, μ は S 上の Borel 測度とする. このとき,
すべての $E \subset S$ に対して

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu(A) : A \in \mathcal{B}(S),\ E \subset A\}$$

$$\mu_*(E) := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{B}(S),\ A \subset E\}$$

とおく.

(12.6) 命題. S は Hausdorff 空間, μ は S 上の Borel 測度, $S_0 \subset S$
は μ に関して厚い集合, i.e., $\mu_*(S - S_0) = 0$ とする. このとき,

$$\bar{\mu}(A \cap S_0) := \mu(A), \quad A \in \mathcal{B}(S)$$

とおくと, この定義は well-defined, i.e., $A_1 \cap S_0 = A_2 \cap S_0$ $(A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S))$
ならば $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ で, $\bar{\mu}$ は $\mathcal{B}(S) \cap S_0 = \mathcal{B}(S_0)$ 上の測度となる.
よって $\bar{\mu}$ は S_0 上の Borel 測度となる.

(証明) $\bar{\mu}$ が well-defined で $\bar{\mu}$ が $\mathcal{B}(S) \cap S_0$ 上の測度となることは付章あるいは
Halmos [; p.75] による. 命題 12.4 より $\mathcal{B}(S) \cap S_0 = \mathcal{B}(S_0)$ なので, $\bar{\mu}$ は
S_0 上の Borel 測度となる □

(12.7) 定義 上の命題で定まる $\bar{\mu}$ のことを μ の S_0 上への制限という.

(12.8) 命題. S は完全正則空間, $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in P} \subset M^+(S)$ はネットで,

$\mu \in M_\tau^+(S)$ とする. $S_0 \subset S$ は μ 及び μ_α に関して厚い集合, i.e.,

$\mu_*(S - S_0) = (\mu_\alpha)_*(S - S_0) = 0$ とする. $\bar{\mu}, \bar{\mu}_\alpha$ は 命題12.6で定まる

μ, μ_α の S_0 上への制限とする. このとき $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ ならば $\bar{\mu}_\alpha \xrightarrow{w} \bar{\mu}$.

(証明) まず $\bar{\mu}$ が τ-正則であることを示す:

$\{H_\alpha\}_{\alpha \in P}$ を S_0 の開集合からなる単調増大ネットとすると,

$$H_\alpha = G_\alpha \cap S_0, \quad \text{各 } G_\alpha \text{ は } S \text{ の開集合}$$

と表される. このとき $\{G_\alpha\}_{\alpha \in P}$ は単調増大とは限らないので次の工夫を行う:

各 $\alpha \in P$ に対して $V_\alpha := \bigcup_{\substack{\beta \le \alpha \\ \beta \in P}} G_\beta$ とおく.

- $\{V_\alpha\}_{\alpha \in P}$ は S の開集合からなる単調増大ネットで, $H_\alpha = V_\alpha \cap S_0$ for all $\alpha \in P$.

∵) 各 V_α は明らかに open subset of S.

<u>単調増大性</u>: $\alpha_1 \le \alpha_2$ とする. $s \in V_{\alpha_1} = \bigcup_{\beta \le \alpha_1} G_\beta$ とすると,

$\exists \beta_0 \in P$ with $\beta_0 \le \alpha_1$; $s \in G_{\beta_0}$. ここで $\beta_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2$ なので,

$s \in \bigcup_{\beta \le \alpha_2} G_\beta = V_{\alpha_2}$. ∴ $V_{\alpha_1} \subset V_{\alpha_2}$ #

<u>$H_\alpha = V_\alpha \cap S_0$</u>: "$\subset$" は明らか. よって "$\supset$" を示す.

$s \in V_\alpha \cap S_0$ とすると, $s \in S_0$ かつ $s \in V_\alpha = \bigcup_{\beta \le \alpha} G_\beta$.

∴ $\exists \beta_0 \le \alpha$; $s \in G_{\beta_0}$ ∴ $s \in G_{\beta_0} \cap S_0 = H_{\beta_0}$

ここで $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ は単調増大なので $\beta_0\le\alpha$ より、$s\in H_{\beta_0}\subset H_\alpha$.

$\therefore s\in H_\alpha$ //

以上より、

$$\overline{\mu}(H_\alpha)=\overline{\mu}(T_\alpha\cap S_0)=\mu(T_\alpha)$$

$$\longrightarrow \mu\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}T_\alpha\Big)=\overline{\mu}\Big(\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}T_\alpha\Big)\cap S_0\Big)$$

$$=\overline{\mu}\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}(T_\alpha\cap S_0)\Big)=\overline{\mu}\Big(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}H_\alpha\Big).$$

よって $\overline{\mu}$ は τ-正則である.

次に F を S_0 の任意の閉集合とする. このとき $F=E\cap S_0$, E は S の閉集合, と表される. よって, $\overline{\mu_\alpha}(F)=\overline{\mu_\alpha}(E\cap S_0)=\mu_\alpha(E)$, $\overline{\mu}(F)=\overline{\mu}(E\cap S_0)=\mu(E)$.

仮定より, $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ なので

$$\limsup_{\alpha\in\Gamma}\overline{\mu_\alpha}(F)=\limsup_{\alpha\in\Gamma}\mu_\alpha(E)\le\mu(E)=\overline{\mu}(F).$$

ゆえに. 定理11.6 (Portmanteau theorem) より $\overline{\mu_\alpha}\xrightarrow{w}\overline{\mu}$ となる □

§13. 測度の弱位相に関するコンパクト性判定条件

この章では、$\mathfrak{S}$上のτ-正則なBorel測度の作る空間$\mathfrak{M}_\tau^+(\mathfrak{S})$の部分集合が測度弱位相に関して相対コンパクトとなるための判定条件（Prokhorovの定理）と相対点列コンパクトとなるための判定条件（LeCamの定理）を与える。

<u>(13.1) 記号</u>. この章を通じて

$\mathfrak{S}$: Hausdorff空間

$\mathfrak{M}_\tau^+(\mathfrak{S})$: $\mathfrak{S}$上のτ-正則なBorel測度全体（測度の弱位相が導入されているとする）

$C_b(\mathfrak{S})$: $\mathfrak{S}$上の実数値有界連続関数全体からなるBanach空間

with $\|f\|_\infty := \sup_{s\in\mathfrak{S}}|f(s)| < \infty$.

<u>(13.2) 定義</u>（一様有界，一様緊密） $M \subset \mathfrak{M}_\tau^+(\mathfrak{S})$とする。

(1) Mが<u>一様有界</u> (uniformly bounded)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sup_{\mu\in M}\mu(\mathfrak{S}) < \infty$

(2) Mが<u>一様緊密</u> (uniformly tight)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists K_\varepsilon$: compact subset of $\mathfrak{S}$; $\sup_{\mu\in M}\mu(\mathfrak{S}-K_\varepsilon) < \varepsilon$.

(13.3) 定理 (Prokhorov–LeCamのコンパクト性判定条件) Sは完全正則空間、$M \subset M_t^+(S)$ は一様有界かつ一様緊密とする。このとき Mは測度の弱位相に関して相対コンパクト。

(証明)

$$\theta : \mu \in M_t^+(S) \longmapsto \theta(\mu)(f) := \int_S f d\mu, \quad f \in C_b(S)$$

を $M_t^+(S)$ から $C_b(S)^*$ の中への自然な埋め込みとする。このとき

① $\theta(M)$ は $C_b(S)^*$ の有界集合

∵) Mは一様緊密なので各$\mu \in M$は緊密。一方、各μはτ-正則で、Sは正則空間であるので、命題4.7よりμは正則。よって、命題4.5よりμはRadonとなる。ゆえに、定理8.3より $\|\theta(\mu)\| = \mu(S)$。ところがMは一様有界なので

$$\sup_{\mu \in M} \|\theta(\mu)\| = \sup_{\mu \in M} \mu(S) < \infty$$

ゆえに $\theta(M)$ は $C_b(S)^*$ の有界集合 //

よって Banach–Alaoglue の定理により $\theta(M)$ は $\sigma(C_b(S)^*, C_b(S))$ に関して相対コンパクトとなる。

さて、$\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ を M の中の任意のネットとすると、$\{\theta(\mu_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$ は $\theta(M)$ の中のネットなので $\theta(M)$ が相対コンパクトであることから、$\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ の部分ネット $\{\mu_\beta\}_{\beta \in \Delta}$ と $L \in C_b(S)^*$ が存在して

$$L(f) = \lim_{p \in \Delta} \int_S f d\mu_p, \quad f \in C_b(S) \quad \cdots \quad (*)$$

となる。以下で、このLが或るRadon測度で表現されることを示す：

② Lは正値線形汎関数

∵) (*)より明らか #

③ Lは定理6.3のtightness condition (*)を満たす。

∵) $\forall \varepsilon > 0$を固定：Mは一様緊密なので

$\exists K_\varepsilon$: compact ; $\sup_{\mu \in M} \mu(S - K_\varepsilon) < \varepsilon$

それゆえ、任意の $f \in C_b(S)$ with $f(K_\varepsilon) = 0$ に対して

$$|L(f)| = \lim_{p \in \Delta} \left| \int_S f d\mu_p \right| = \lim_{p \in \Delta} \left| \int_{S-K_\varepsilon} f d\mu_p \right|$$

$$\leq \limsup_{p \in \Delta} \int_{S-K_\varepsilon} |f| d\mu_p \leq \|f\|_\infty \cdot \limsup_{p \in \Delta} \mu_p(S - K_\varepsilon)$$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \sup_{\mu \in M} \mu(S - K_\varepsilon) < \varepsilon \|f\|_\infty \quad \#$$

ゆえに、②,③と定理6.3より

$\exists \mu$: S上のRadon測度 ; $L(f) = \int_S f d\mu$ for all $f \in C_b(S)$

となる。このとき $\mu \in M_\tau^+(S)$ で $\mu_p \xrightarrow{w} \mu$。ゆえに、Mは $M_\tau^+(S)$ の中で

相対コンパクトとなる □

S が完備に距離付け可能ならば、定理11.3の逆が成立つ.

<u>(13.4) 定理</u> (Prokhorov, 1956) S は完備に距離付け可能であるとする. $M \subset M_\tau^+(S)$ が測度の弱位相に関して相対コンパクトならば M は一様有界かつ一様緊密である.

(証明) 一般性を失うことなく, S を完備距離空間と仮定する. このとき, τ-正則性と Radon 性が一致する, i.e., $M_\tau^+(S) = M_t^+(S) :=$ S 上の Radon 測度全体となることを注意しておく.

また, 一般性を失うことなく M はコンパクトと仮定する.

$\because$) 仮定より, M は相対コンパクトなので $\overline{M}$ はコンパクトとなる. そこで $\overline{M}$ に対して一様有界性と一様緊密性を示せれば, 明らかに M 自身も一様有界かつ一様緊密となる //

<u>一様有界性</u> $\theta : M_\tau^+(S) \to C_b(S)^*$ を前定理の証明で用いた自然な埋め込みとすると $\theta(M)$ は弱位相 $\sigma(C_b(S)^*, C_b(S))$ に関してコンパクトとなる. それ故, $\sigma(C_b(S)^*, C_b(S))$ に関して有界. よって, $\theta(M)$ は $C_b(S)$ のノルム位相に関して有界となる. ここで各 $\mu \in M$ は Radon なので, 定理8.3より $\mu(S) = \|\theta(\mu)\|$.

よって, $\sup_{\mu \in M} \mu(S) = \sup_{\mu \in M} \|\theta(\mu)\| < \infty$. ゆえに M は一様有界

一様緊密性: まず次の主張を示す:

主張. $\forall \varepsilon>0,\ \forall \delta>0,\ \exists\{U_1,\cdots,U_k\}$: 半径$\delta$の開球;

$$\mu\left(S-\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)<\varepsilon \quad \text{for all } \mu\in M.$$

∵) 各$\mu\in M$は tight なので

$\exists K_\mu$: compact; $\mu(S-K_\mu)<\frac{\varepsilon}{2}$. (1)

K_μのコンパクト性より半径δの開球$U_{\mu,1},\cdots,U_{\mu,k_\mu}$が存在して

$$K_\mu\subset\bigcup_{i=1}^{k_\mu}U_{\mu,i}:=U_\mu$$

とできる. このとき (1) より

$$\mu(S-U_\mu)<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

さて, 各$\mu\in M$に対して

$$G_\mu:=\left\{\nu\in M_1^+(S):\ \nu(U_\mu)\le\mu(U_\mu)-\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

と置くと.

① $\{G_\mu\}_{\mu\in M}$は測度の弱位相に関する開集合からなる族で $M\subset\bigcup_{\mu\in M}G_\mu$.

∵) $\mu\in G_\mu$なので $M\subset\bigcup_{\mu\in M}G_\mu$ は明らか. よって各G_μが open set であることを示す: $\nu_\alpha\notin G_\alpha$ で $\nu_\alpha\xrightarrow{w}\nu$ とする. このとき $\nu_\alpha(U_\mu)\le\mu(U_\mu)-\frac{\varepsilon}{2}$.

U_μは open subset of S なので Portmanteau Theorem より

$$\nu(U_\mu)\le\liminf_{\alpha}\nu_\alpha(U_\mu)\le\mu(U_\mu)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

∴ $\nu\notin G_\mu$. よって, G_μは測度の弱位相に関して open set #

仮定より. Mはコンパクトなので ①より $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n \in M$ が存在して

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\mu_j} \qquad (3)$$

となる. このとき $\{U_{\mu_1,1}, \cdots U_{\mu_1,k_{\mu_1}}, \cdots, U_{\mu_n,1}, \cdots U_{\mu_n,k_{\mu_n}}\}$ が求める半径δの開球族である.

∵) $^\forall \mu \in M$を固定: (3)より. $1 \leq {}^\exists j_0 \leq n$; $\mu \in G_{\mu_{j_0}}$

$$\therefore \mu(U_{\mu_{j_0}}) > \mu_{j_0}(U_{\mu_{j_0}}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

それゆえ. (2)より

$$\mu(S - U_{\mu_{j_0}}) < \mu_{j_0}(S - U_{\mu_{j_0}}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \mu\Big(S - \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k_{\mu_j}} U_{\mu_j,i}}_{= U_{\mu_j}}\Big) = \mu\Big(S - \bigcup_{j=1}^{n} U_{\mu_j}\Big) \leq \mu(S - U_{\mu_{j_0}}) < \varepsilon \quad /\!/$$

よって. $\forall \varepsilon > 0$. $^\forall k \in \mathbb{N}$ に対して. (主張)において. $\delta = 1/k$ と置くと. 半径 $1/k$ の開球 $U_{k,1}, \cdots, U_{k,m_k}$ が存在して.

$$\sup_{\mu \in M} \mu\Big(S - \bigcup_{i=1}^{m_k} U_{k,i}\Big) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \qquad (4)$$

となる. そこで

$$K_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m_k} \overline{U_{k,i}}$$

と置くと 命題4.12あるいは命題4.13と同様にして. K_εは 全有界かつ閉集合となる. よって. Sの完備性より. K_εはコンパクトである. さらに $^\forall \mu \in M$に対して

$$
\begin{aligned}
\mu(S - C_\varepsilon) &\leq \mu\left(S - \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m_k} U_{k,i}\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(S - \bigcup_{i=1}^{m_k} U_{k,i}\right)\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(S - \bigcup_{i=1}^{m_k} U_{k,i}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\mu \in M} \mu\left(S - \bigcup_{i=1}^{m_k} U_{k,i}\right) \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

ゆえに M は uniformly tight となる.

以上で証明が完了した $\square$