問題 1.2.1． $\mathbf{R}^n$ の $\mathbf{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，θ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角とする。次の等式を示せ。

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2)$

(2) $\cos\theta = \dfrac{\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2}{2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|}$ (余弦定理)

(解答例)

(1) 右辺を変形すると

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2 &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\}\\ &= 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

となる。

(2) (1) を用いて右辺を変形すると

$$\frac{||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2}{2\,||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||} = \frac{2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{2\,||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||} = \frac{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||\,\cos\theta}{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||} = \cos\theta$$

となる。

問題 1.3.3． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくとき，次の行列を求めよ。

(1) $A+B$ (2) $3A$ (3) $2A+B$ (4) $A-B$ (5) $A-2B$ (6) $B-A$

(解答例)

(1) $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(3) $2A+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

(4) $A-B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(5) $A-2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 7 \\ -5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

(6) $B-A = -(A-B) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

問題 1.3.8． 以下で行列の和，積が定義されれば，次の等式が成り立つことを確かめよ (O は零行列とする)。

(1) $AO = O,\ OA = O$

(2) $(AB)C = A(BC)$

(3) $(A+B)C = AC + BC$

(4) $A(B+C) = AB + AC$

(解答例)

(1) $A = (a_{ij})$ を (ℓ, m) 行列，O を (m, n) 零行列とすると

$$AO \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{im} \cdot 0 = 0$$

だから $AO_{m,n} = O_{\ell,n}$ が成り立つ。同様に，O を (ℓ, m) 零行列，$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とすると

$$OA \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{mj} = 0$$

だから $O_{\ell,m}A = O_{\ell,n}$ が得られる。

(2) $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，$C = (c_{ij})$ をそれぞれ (ℓ, m)，(m, n)，(n, p) 行列とすると，積 AB の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$ であるから

$$(AB)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{t=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st} \right) c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}.$$

また，積 BC の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} b_{it}c_{tj}$ であるから

$$A(BC) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \left(\sum_{t=1}^{n} b_{st}c_{tj} \right) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} a_{is}b_{st}c_{tj} = \sum_{t=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{st}c_{tj}$$

だから $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことが分かる。

(3) $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ を (ℓ, m) 行列，$C = (c_{ij})$ を (m, n) 行列とすると

$$(A+B)C \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} (a_{is} + b_{is})c_{sj},$$

$$AC + BC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}c_{sj} + \sum_{s=1}^{m} b_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{m} (a_{is} + b_{is})c_{sj}$$

だから $(A+B)C = AC + BC$ となる。

(4) $A = (a_{ij})$ を (ℓ, m) 行列，$B = (b_{ij})$，$C = (c_{ij})$ を (m, n) 行列とすると

$$A(B+C) \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}(b_{sj} + c_{sj}),$$

$$AB + AC \text{ の } (i,j) \text{ 成分} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj} + \sum_{s=1}^{m} a_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}(b_{sj} + c_{sj})$$

だから $A(B+C) = AB + AC$ を得る。

問題 1.3.9． $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，$(AB)C$ と $A(BC)$ を計算し，等しいことを確かめよ。

(解答例)

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

また，$BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ より

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}$$

となる。これより $(AB)C = A(BC)$ が分かる。

問題 1.3.10． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ について，積 AB, BA を求めよ。

(解答例)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 1.3.11． $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のそれぞれについて，n 個の積 A^n, B^n を求めよ。

(解答例)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

これより

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^n = O \ (n \geq 3)$$

となる。

次に,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

これより $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$n = 3k - 2$ のとき，$B^n = B$,

$n = 3k - 1$ のとき，$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$n = 3k$ のとき，$B^n = E_3$　(3 次の単位行列)

となる。

問題 1.4.2． $A=(a_{ij})$ を n 次正方行列とし，$\mathbf{R}^n$ の第 i 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対して，$A\boldsymbol{e}_i$，${}^t\boldsymbol{e}_iA$ を A の成分を用いて行ベクトル，列ベクトルで表せ。

(解答例)

$$A\boldsymbol{e}_i=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

だから $A\boldsymbol{e}_i$ は行列 A の第 i 列ベクトルである。同様に，

$${}^t\boldsymbol{e}_iA=(0,\ldots,1,\ldots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in})$$

より ${}^t\boldsymbol{e}_iA$ は行列 A の第 i 行ベクトルであることが分かる。

問題 1.4.4．

(1) 対称行列でありかつ交代行列である行列は，零行列に限ることを示せ。

(2) 任意の正方行列は，適当な対称行列と交代行列の和で表せることを示せ。

(解答例)

(1) 行列 A が対称かつ交代行列とすると，$A={}^tA=-A$ だから $2A=O$ となり $A=O$ となる。すなわち，対称かつ交代行列は零行列である。

(2) 行列 $A+{}^tA$ は

$${}^t(A+{}^tA)={}^tA+{}^t({}^tA)={}^tA+A=A+{}^tA$$

となり対称行列であることが分かる。同様にして ${}^t(A-{}^tA)={}^tA-{}^t({}^tA)={}^tA-A=-(A-{}^tA)$ だから $A-{}^tA$ は交代行列である。これより

$$A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$$

と表せるから，任意の行列は対称行列と交代行列の和として表せることが分かる。

問題 1.4.5．

(1) $AB = E,\ B'A = E$ が成り立つとき $B' = B$ となることを示せ。

(2) 逆行列が存在すれば，それはただ１つであることを示せ。

(解答例)

(1) 題意より $B' = B'E = B'(AB) = (B'A)B = EB = B$ となる。

(2) B, B' を行列 A の逆行列とすると $AB = BA = E,\ AB' = B'A = E$ が成り立つ。(1) より $B = B'$ が得られ，逆行列は存在すれば唯一であることが分かる。

問題 1.4.7． 上の例で $AA^{-1} = E = A^{-1}A$ であることを確かめよ。

(解答例)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ より

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix},$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

であるから $AA^{-1} = A^{-1}A = E_2$ が確かめられた。

問題 1.4.8． 次の行列について逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1-6}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2-15}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$

問題 1.4.10． $A,\ B$ を n 次正方行列とし，A が正則行列とする。このとき $AB=E$ ならば B は正則行列であることを示せ。

(解答例)

行列 A は正則だから逆行列 A^{-1} が存在する。A^{-1} を左側，A を右側から $AB=E$ にかけると，$A^{-1}ABA=A^{-1}A$ だから $BA=E$ となる。これより行列 B は A の逆行列である。ゆえに B は正則である。

問題 1.5.1． $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ のとき，$\boldsymbol{c}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ をみたす $s,\ t$ を求めよ。

(解答例)

題意より

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2s+2t \\ 3s-\ \ t \end{pmatrix}$$

だから成分を比較すると

$$\begin{cases} 2s+2t=4 \\ 3s-\ \ t=5 \end{cases}$$

これを解くと $s=\frac{7}{4}, t=\frac{1}{4}$ である。

問題 1.5.2． $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき，直線 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\ (t\in\mathbf{R})$ と直線 $s\boldsymbol{c}\ (s\in\mathbf{R})$ との交点を求めよ。

(解答例)

題意より $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=s\boldsymbol{c}$ となる $t,\,s$ を求めると

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから成分を比較すると

$$\begin{cases} 3+\ \ t=-s \\ -2-4t=\ 2s \end{cases}$$

これを解くと $s=-5, t=2$ である。直線 $s\boldsymbol{c}$ に代入すると，求める交点の座標は $(5,-10)$ である。

問題 1.5.3． $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\,\boldsymbol{b}$ とする。$||\,\boldsymbol{p}\,||=10$ をみたすような実数 t の値を求めよ。

(解答例)

題意より $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\,\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 8 \\ -2+2t \end{pmatrix}$ だから

$$||\,\boldsymbol{p}\,||^2=8^2+(-2+2t)^2=4t^2-8t+68$$

である。$||\,\boldsymbol{p}\,||=10$ より $4t^2-8t+68=100$ だから

$$4t^2-8t-32=0, \qquad 4(t+2)(t-4)=0.$$

よって，求める値は $t=-2, 4$ である。

問題 1.5.4．

(1) 点 $\mathrm{A}(-1,1,2)$, $\mathrm{B}(2,-3,1)$ をとるとき，点 A を通り直線 OB に直交する平面の方程式を求めよ。

(2) 点 $(2,3,1)$ を通り平面 $2x+4y+3z=0$ に平行な平面の方程式を求めよ。

(解答例)

(1) 題意から $2(x+1)-3(y-1)+(z-2)=0$ だから求める平面の方程式は $2x-3y+z=-3$ である。

(2) 題意から $2(x-2)+4(y-3)+3(z-1)=0$ だから求める平面の方程式は $2x+4y+3z=19$ である。

問題 1.5.5． $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくとき次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を求めよ。

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta=\dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\cdot||\boldsymbol{b}||}$ を求めよ。

(解答例)

(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1\cdot(-2)+2\cdot 0+3\cdot 1=1.$ ゆえに $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1$ である。

(2) $||\boldsymbol{a}||^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14,\ ||\boldsymbol{b}||^2 = (-2)^2 + 0^2 + 1^2 = 5$ であるから $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{14},\ ||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{5}$ より

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||} = \frac{1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{70}}.$$

ゆえに $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{70}}$ である。

問題 1.5.6. 次を計算せよ。

$$3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答例)

$$\begin{aligned} 3\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & -13 \\ 7 & -9 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

問題 1.5.7. 次の４つの行列から２つを選ぶ６通りの組み合わせのうち，和が定義できるものはいく通りあるか。それらについて和を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(解答例)

和は型が同じ場合に定義できるから $A + B\,(= B + A),\ C + D\,(= D + C)$ の２通りある。

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C + D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

問題 1.5.8． 次の３つの行列から２つを選んで並べる６通りの方法のうち，積が定義できるのはいく通りあるか。それらの積をすべて計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答例)

積は列の数と行の数が等しいとき定義できる。行列 $A,\ B,\ C$ はそれぞれ $(3,2),\ (2,2),\ (2,3)$ 行列であるから $AB,\ AC,\ BC,\ CA$ の４通りある。

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 13 & 14 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 19 & -6 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 11 & -6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

問題 1.6.1． ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ について，次の等式を証明せよ。

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \dfrac{1}{4}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2)$

(3) $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2 = 2(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2)$

(4) $||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{c}||^2 + ||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2 = ||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2 + ||\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2$

(5) $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}||^2 + ||\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2 = 4(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{c}||^2)$

(解答例)

(1) 左辺より

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = 0. \end{aligned}$$

(2) 右辺より

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2-||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2\\
&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\
&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})-\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\}\\
&=4(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).
\end{aligned}
$$

ゆえに $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{4}(||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2-||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2)$ が成り立つ。

(3) 左辺より

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2+||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2\\
&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\
&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\
&=2\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\}\\
&=2(||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2).
\end{aligned}
$$

ゆえに等式が示された。

(4) 最初に

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2\\
&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})
\end{aligned}
$$

であるから，左辺は

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2+||\boldsymbol{c}||^2+||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2\\
&=2\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\}
\end{aligned}
$$

となる。また，右辺は

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2+||\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}||^2\\
&=(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\
&=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})+2(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\\
&=2\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\}
\end{aligned}
$$

となり，左辺に等しいことが分かる。ゆえに等式が証明された。

(5) (3) を用いると左辺は

$$
\begin{aligned}
&||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}||^2+||\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||^2+||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2\\
&=(||\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})||^2+||\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})||^2)+(||(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}||^2+||(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}||^2)\\
&=2(||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}||^2)+2(||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2+||\boldsymbol{a}||^2)\\
&=2(2||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}||^2+||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}||^2)\\
&=4(||\boldsymbol{a}||^2+||\boldsymbol{b}||^2+||\boldsymbol{c}||^2)
\end{aligned}
$$

となり右辺に等しいことが分かる。

問題 1.6.2. 複素数 $z = x + y\boldsymbol{i}$ $(x,\, y \in \mathbf{R})$ に対して 2 次行列 $A(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ を対応させるとき,

(1) $A(z_1 + z_2) = A(z_1) + A(z_2)$

(2) $A(z_1 z_2) = A(z_1)A(z_2)$

(3) $A(z^{-1}) = A(z)^{-1} \quad (z \neq 0)$

(4) $A(\overline{z}) = {}^t A(z)$

が成り立つことを示せ。また $e^{\boldsymbol{i}\,\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\sin\theta$ と定義するとき次の問いに答えよ。

(5) $A\Big(e^{\boldsymbol{i}\,\theta}\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

(6) $A\Big(e^{\boldsymbol{i}\,\theta}\Big)^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$ となることを示せ。

(7) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

(解答例)

(1) $z_j = x_j + y_j\boldsymbol{i}$ $(j = 1, 2)$ とすると $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)\boldsymbol{i}$ より

$$\begin{aligned} A(z_1 + z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= A(z_1) + A(z_2). \end{aligned}$$

ゆえに $A(z_1 + z_2) = A(z_1) + A(z_2)$ が成り立つ。

(2) $z_1 z_2 = (x_1 + y_1\boldsymbol{i})(x_2 + y_2\boldsymbol{i}) = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\boldsymbol{i}$ より

$$A(z_1 z_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}.$$

一方

$$\begin{aligned} A(z_1)A(z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに $A(z_1 z_2) = A(z_1)A(z_2)$ が成り立つ。

(3) (2) より $A(z)A(z^{-1}) = A(z\,z^{-1}) = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ だから $A(z^{-1}) = A(z)^{-1}$ が得られる。

(3) **(別解)** $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x + y\,\boldsymbol{i}} = \dfrac{x - y\,\boldsymbol{i}}{(x + y\,\boldsymbol{i})(x - y\,\boldsymbol{i})} = \dfrac{x - y\,\boldsymbol{i}}{x^2 + y^2}$ より

$$A(z^{-1}) = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

一方

$$A(z)^{-1} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

だから $A(z^{-1}) = A(z)^{-1}$ が得られる。

(4) $\overline{z} = x - y\,\boldsymbol{i}$ より

$$A(\overline{z}) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = {}^t\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = {}^tA(z).$$

ゆえに $A(\overline{z}) = {}^tA(z)$ が成り立つ。

次に，定義 $e^{\boldsymbol{i}\,\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\,\sin\theta$ において，θ の替わりに $-\theta$ および $n\theta$ とすると

$$e^{-\boldsymbol{i}\,\theta} = \cos\theta - \boldsymbol{i}\,\sin\theta,$$
$$e^{\boldsymbol{i}\,n\theta} = \cos n\theta + \boldsymbol{i}\,\sin n\theta$$

となる。これより

(5) (3) より

$$A\left(e^{\boldsymbol{i}\,\theta}\right)^{-1} = A\left(e^{-\boldsymbol{i}\,\theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(6) (2) より

$$A\left(e^{\boldsymbol{i}\,\theta}\right)^n = A\left(e^{\boldsymbol{i}\,n\theta}\right) = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

(7) (6) より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}^n = A\left(e^{\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}}\right)^n \\ &= A\left(e^{\frac{n\pi}{2}\boldsymbol{i}}\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{2} & -\sin\frac{n\pi}{2} \\ \sin\frac{n\pi}{2} & \cos\frac{n\pi}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

だから

(a) $n=4k$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos 2k\pi & -\sin 2k\pi \\ \sin 2k\pi & \cos 2k\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

(b) $n=4k+1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi & -\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \\ \sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi & \cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $n=4k+2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(2k+1)\pi & -\sin(2k+1)\pi \\ \sin(2k+1)\pi & \cos(2k+1)\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2.$$

(d) $n=4k+3$ のとき

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi & -\sin\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi \\ \sin\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi & \cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 1.6.3. 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がすべての 2 次正方行列 X について $AX=XA$ をみたすための必要十分条件を求めよ。

(解答例)

2 次の正方行列 X を $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると，$AX=XA$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

だから，成分を比較すると x, y, z, w についての恒等式

$$\begin{aligned} ax+bz &= ax+cy \quad \cdots \text{①} \\ ay+bw &= bx+dy \quad \cdots \text{②} \\ cx+dz &= az+cw \quad \cdots \text{③} \\ cy+dw &= bz+dw \quad \cdots \text{④} \end{aligned}$$

が得られる。① から $bz=cy$ が任意の y, z に対して成り立つので，例えば $y=1$, $z=0$ とすると $c=0$ が得られ，$y=0$, $z=1$ とすると $b=0$ が得られる。また，このとき ②は $(a-d)y=0$ となり，これが任意の y に対して成り立つので $a=d$ となる。③ および ④ からも同様な結果が

得られる。これより，任意の 2 次正方行列 X に対して $AX = XA$ ならば $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\,E_2$ である。逆に，$A = a\,E_2$ ならば $AX = XA$ が成り立つ。したがって，求める必要十分条件は $A = a\,E_2$ である。

問題 1.6.4． n 次正方行列 $A,\ B$ がともに上 (下) 三角行列ならば，積 AB も上 (下) 三角行列となることを示せ。

(解答例)

n 次正方行列 $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ を上三角行列とすると $i = 2, 3, \ldots, n$ に対して

$$a_{ij} = 0, \qquad b_{ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

である。これより $j = 1, 2, \ldots, i-1$ に対して

$$\begin{aligned} \text{積 } AB \text{ の } (i,j) \text{ 成分} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ii-1}b_{i-1j} + a_{ii}b_{ij} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \cdots + 0 \cdot b_{i-1j} + a_{ii} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから，AB は上三角行列である。下三角行列の場合も同様にして確かめられる。

問題 1.6.5． n 次対称行列 $A,\ B$ に対して，AB が対称行列であるための必要十分条件は $AB = BA$ となることを示せ。

(解答例)

n 次対称行列 $A,\ B$ に対して AB が対称行列と仮定すると

$$AB = {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA$$

より $AB = BA$ が成り立つ。

逆に，$AB = BA$ を仮定すると，$A,\ B$ は対称行列であるから

$${}^t(AB) = {}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB = AB$$

となり，行列 AB は対称行列である。

問題 1.6.6. 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とし，逆行列を $A^{-1} = (a_{ij})$ とすると $AA^{-1} = E_3$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ a_{21}+3a_{31} & a_{22}+3a_{32} & a_{23}+3a_{33} \\ 2a_{11}+3a_{31} & 2a_{12}+3a_{32} & 2a_{13}+3a_{33} \end{pmatrix}$$

だから成分を比較すると

$$\begin{array}{lll} a_{11}+a_{31}=1\cdots① & a_{21}+3a_{31}=0\cdots④ & 2a_{11}+3a_{31}=0\cdots⑦ \\ a_{12}+a_{32}=0\cdots② & a_{22}+3a_{32}=1\cdots⑤ & 2a_{12}+3a_{32}=0\cdots⑧ \\ a_{13}+a_{33}=0\cdots③ & a_{23}+3a_{33}=0\cdots⑥ & 2a_{13}+3a_{33}=1\cdots⑨ \end{array}$$

ここで，① と ⑦，② と ⑧，③ と ⑨ からそれぞれ $a_{11} = 3$ および $a_{31} = -2$，$a_{12} = 0$ および $a_{32} = 0$，$a_{13} = -1$ および $a_{33} = 1$ となる。また，④, ⑤, ⑥ からそれぞれ $a_{21} = 6$，$a_{22} = 1$，$a_{23} = -3$ が得られる。これより求める逆行列は次のようになる：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 与えられた行列を A とし，逆行列を $A^{-1} = (a_{ij})$ とすると $AA^{-1} = E_3$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+2a_{21}+a_{31} & a_{12}+2a_{22}+a_{32} & a_{13}+2a_{23}+a_{33} \\ a_{11}-a_{21} & a_{12}-a_{22} & a_{13}-a_{23} \\ a_{21}+a_{31} & a_{22}+a_{32} & a_{23}+a_{33} \end{pmatrix}$$

だから成分を比較すると

$$\begin{array}{lll} a_{11}+2a_{21}+a_{31}=1\cdots① & a_{11}-a_{21}=0\cdots④ & a_{21}+a_{31}=0\cdots⑦ \\ a_{12}+2a_{22}+a_{32}=0\cdots② & a_{12}-a_{22}=1\cdots⑤ & a_{22}+a_{32}=0\cdots⑧ \\ a_{13}+2a_{23}+a_{33}=0\cdots③ & a_{13}-a_{23}=0\cdots⑥ & a_{23}+a_{33}=1\cdots⑨ \end{array}$$

ここで，①, ④, ⑦ から $a_{11} = a_{21} = -a_{31} = \frac{1}{2}$ が得られ，②, ⑤, ⑧ より $a_{12} = -a_{22} = a_{32} = \frac{1}{2}$ となり，③, ⑥, ⑨ から $a_{13} = a_{23} = -\frac{1}{2}$，$a_{33} = \frac{3}{2}$ を得る。これより求める逆行

列は次のようになる：

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

問題 2.1.2. 次の連立１次方程式に対応する拡大係数行列を，基本変形により変形して，解が存在しないことを示せ。

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

(解答例)

拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を } (-2) \text{ 倍，} (-3) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

これに対応する連立１次方程式を考えると，第３行はつねに成り立たない式 $0 = 2$ となるので，連立１次方程式の解はない。

(別解)　最後の理由として，$\operatorname{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b}) = 3$，$\operatorname{rank} A = 2$ であり，$\operatorname{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b}) \neq \operatorname{rank} A$ だから連立１次方程式の解はない。

問題 2.1.3. 連立１次方程式

$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + y = -2 \end{cases}$$

を解け。係数 a によって解の状態がかわることに注意せよ。

(解答例)

拡大係数行列に対して行に関する基本変形を行うと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ a & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a^2 & -2-2a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & -(a+1)(a-1) & -2(a+1) \end{array}\right)$$

となる。

$a = -1$ のとき，$x - y = 2$ より $y = t$ とおくと，$x = 2 + t$ となるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。

$a=1$ のとき，上の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

となり，第２行はつねに成り立たない式 $0=-4$ となるので，連立１次方程式の解はない。

$a \neq \pm 1$ のとき，上の拡大係数行列をさらに行に関して基本変形すると

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1-a^2 & -2-2a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{a-1} \\ 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{array}\right)$$

だから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{a-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 2.2.1． 次の等式を示せ。

(1) $E(i;\lambda)E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big) = E = E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)E(i;\lambda) \quad (\lambda \neq 0).$

(2) $E(i,j)^2 = E.$

(3) $E(i,j;\lambda)E(i,j;-\lambda) = E = E(i,j;-\lambda)E(i,j;\lambda).$

これより，基本行列は正則行列で，その逆行列は

(1) $E(i;\lambda)^{-1} = E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)$

(2) $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$

(3) $E(i,j;\lambda)^{-1} = E(i,j;-\lambda)$

となり，同じ型の基本行列であることがわかる。

(解答例)

基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とする。

(1) $\lambda \neq 0$ のとき $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$E(i;\lambda)\boldsymbol{e}_k = E(i;\lambda) \text{ の第 } k \text{ 列} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_k & (k \neq i) \\ \lambda\,\boldsymbol{e}_i & (k = i) \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}
E(i;\lambda)E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big) &= E(i;\lambda)\Big(\boldsymbol{e}_1,\dots,\frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(E(i;\lambda)\boldsymbol{e}_1,\dots,\frac{1}{\lambda}\,E(i;\lambda)\boldsymbol{e}_i,\dots,E(i;\lambda)\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(\boldsymbol{e}_1,\dots,\frac{1}{\lambda}\,(\lambda\,\boldsymbol{e}_i),\dots,\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= E.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)E(i;\lambda) &= E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)(\boldsymbol{e}_1,\dots,\lambda\,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_n) \\
&= \Big(E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)\boldsymbol{e}_1,\dots,\lambda\,E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)\boldsymbol{e}_i,\dots,E\Big(i;\frac{1}{\lambda}\Big)\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(\boldsymbol{e}_1,\dots,\lambda\Big(\frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{e}_i\Big),\dots,\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= E.
\end{aligned}$$

これより (1) の等式が示された。

(2) $k=1,2,\dots,n$ に対して

$$E(i,j)\boldsymbol{e}_k = E(i,j) \text{ の第 } k \text{ 列} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_k & (k\neq i,\ k\neq j) \\ \boldsymbol{e}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_i & (k=j) \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}
E(i,j)^2 &= E(i,j)E(i,j) \\
&= E(i,j)(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_j,\dots,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_n) \\
&= (E(i,j)\boldsymbol{e}_1,\dots,E(i,j)\boldsymbol{e}_j,\dots,E(i,j)\boldsymbol{e}_i,\dots,E(i,j)\boldsymbol{e}_n) \\
&= (\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_i,\dots,\boldsymbol{e}_j,\dots,\boldsymbol{e}_n) \\
&= E.
\end{aligned}$$

これより (2) の等式が示された。

(3) $k=1,2,\dots,n$ に対して

$$E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_k = E(i,j;\lambda) \text{ の第 } k \text{ 列} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_k & (k\neq j) \\ \lambda\,\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j & (k=j) \end{cases}$$

より

$$E(i,j;\lambda)E(i,j;-\lambda) \;=\; E(i,j;\lambda)(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_i,\dots,(-\lambda)\,\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j,\dots,\boldsymbol{e}_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_1, \ldots, E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_i, \ldots, \\
&\qquad (-\lambda)\, E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_i + E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_j, \ldots, E(i,j;\lambda)\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, (-\lambda)\,\boldsymbol{e}_i + \lambda\,\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= E.
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
E(i,j;-\lambda)E(i,j;\lambda) &= E(i,j;-\lambda)\,(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \Big(E(i,j;-\lambda)\boldsymbol{e}_1, \ldots, E(i,j;-\lambda)\boldsymbol{e}_i, \ldots, \\
&\qquad \lambda\, E(i,j;-\lambda)\boldsymbol{e}_i + E(i,j;-\lambda)\boldsymbol{e}_j, \ldots, E(i,j;-\lambda)\boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= \Big(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{e}_i + (-\lambda)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n\Big) \\
&= (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= E.
\end{aligned}
$$

これより (3) の等式が示された。

問題 2.2.4. 次の行列の被約階段行列と階数を求めよ．また被約階段行列に変形するための正則行列を求めよ．

$$
(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}
\qquad
(2)\ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}
\qquad
(3)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}
$$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
\begin{aligned}
(A\,|\,E) &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍，} (-3) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) && \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) && \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を } (-2) \text{ 倍，3 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。}\end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) && \left(\text{第 2 行を } \left(-\tfrac{1}{3}\right) \text{ 倍する。}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)
$$

（第 2 行を (-2) 倍して第 1 行に加える。）

これより被約階段行列は左側の行列

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

であり $\operatorname{rank} A = 3$ である。また被約階段行列に変形するための正則行列 P は右側の 3 次正方行列

$$
P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}
$$

である。

(2) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

（第 1 行を 1 倍，2 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

（第 3 行を (-3) 倍して第 2 行に加える。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -39 & -8 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

（第 1 行を (-1) 倍する。第 2 行と第 3 行を入れ替える。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -39 & -8 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right)
$$

（第 3 行を $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍する。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & -1 & -5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 16 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)
$$

（第 3 行を 1 倍，(-1) 倍して，それぞれ第 1 行，第 2 行に加える。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 8 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)
$$

（第 2 行を 2 倍して第 1 行に加える。）

$$
\to \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & \frac{13}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)
$$

これより被約階段行列は左側の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 14 & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 13 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

であり $\operatorname{rank} A = 3$ である。また被約階段行列に変形するための正則行列 P は右側の 3 次正方行列

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

（第 1 行を (-1) 倍して第 4 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

（第 2 行を (-2) 倍，(-3) 倍して，それぞれ第 1 行，第 3 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & -4 & -6 & -8 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -8 & 4 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

（第 1 行と第 2 行を入れ替え，さらに，第 2 行と第 4 行を入れ替える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -8 & 4 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第 2 行を $\frac{1}{2}$ 倍する。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -6 & -8 & 4 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -8 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第 2 行を (-1) 倍，2 倍，4 倍して，それぞれ第 1 行，第 3 行，第 4 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 4 & -1 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

（第 3 行を (-1) 倍して第 4 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -6 & -8 & 4 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

（第 3 行を $\left(-\frac{1}{6}\right)$ 倍する。）

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-4) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

これより被約階段行列は左側の行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり $\operatorname{rank} A = 3$ である。また被約階段行列に変形するための正則行列 P は右側の 4 次正方行列

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

である。

問題 2.2.6. 基本変形を用いて次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第1行と第2行を} \\ \text{入れ替える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第2行を } \frac{1}{5} \text{ 倍する。}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第2行を 2 倍して} \\ \text{第1行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第2行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第1行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第3行を 2 倍，} (-1) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第1行，} \\ \text{第2行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -6 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第1行と第2行を入れ替え，} \\ \text{さらに第2行と第3行を} \\ \text{入れ替える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第3行を } \left(-\frac{1}{6}\right) \text{ 倍する。}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第3行を } (-2) \text{ 倍，1 倍} \\ \text{して，それぞれ第1行，} \\ \text{第2行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(3) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第2行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第3行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に 加える。} \end{array}\right)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-b) \text{ 倍，} (-c) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-a) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) 与えられた行列を A とおき，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 4 行を 2 倍，3 倍，} \\ (-2) \text{ 倍して，それぞれ} \\ \text{第 1 行，第 2 行，第 3 行} \\ \text{に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\text{第 3 行を第 1 行に加える。}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を 2 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

これより求める逆行列は

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

問題 2.3.3． 次の連立１次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$
(1)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & y & + & 5z & = & 22 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ -2x & + & 4y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.
\qquad
(2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & + & y & + & z & + & w & = & 3 \\ x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 12 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 5w & = & -3 \\ x & + & y & - & z & - & w & = & 0 \end{array}\right.
$$

$$
(3)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & - & w & = & -1 \\ 2x & - & 2y & + & z & + & 2w & = & 5 \\ 3x & - & 2y & & & + & w & = & 4 \\ x & - & 4y & + & 4z & + & 3w & = & 6 \end{array}\right.
$$

(解答例)

(1) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 5 & 22 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)
$$

(第２行を ３ 倍，(−2) 倍して，それぞれ第１行，第３行に加える。)

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5 & 8 & 19 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

(第２行を (−1) 倍して第１行と入れ替える。)

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

(第３行を １ 倍，(−8) 倍して，それぞれ第１行，第２行に加える。)

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

(第２行を $\frac{1}{5}$ 倍する。)

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)
$$

(第２行を ２ 倍して第１行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{21}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -12 \\ -21 \\ 25 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(第 4 行を (-4) 倍，(-1) 倍，(-2) 倍して，それぞれ第 1 行，第 2 行，第 3 行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

(第 1 行と第 4 行，第 2 行と第 3 行を入れ替える。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 12 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

(第 2 行を 1 倍，(-2) 倍，(-3) 倍して，それぞれ第 1 行，第 3 行，第 4 行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & -16 & 18 \\ 0 & 0 & -10 & -16 & 12 \end{array}\right)$$

(第 2 行，第 3 行，第 4 行をそれぞれ (-1) 倍，(-1) 倍，$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍する。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 16 & -18 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -6 \end{array}\right)$$

(第 4 行を (-1) 倍して第 3 行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -6 \end{array}\right)$$

(第 3 行を $\frac{1}{2}$ 倍する。)

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -6 \end{array}\right)$$

(第 3 行を (-4) 倍，5 倍，(-5) 倍して，それぞれ第 1 行，第 2 行，第 4 行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -10 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 24 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第4行を} \left(-\frac{1}{12}\right) \text{倍する。} \right)$

$$\to \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -10 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -27 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

（第4行を 10 倍，(-13) 倍，(-4) 倍して，それぞれ第1行，第2行，第3行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

（第1行を (-2) 倍，(-3) 倍，(-1) 倍して，それぞれ第2行，第3行，第4行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 4 & 7 \\ 0 & -6 & 7 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

（第2行を (-1) 倍して，それぞれ第3行，第4行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第3行を} \left(-\frac{1}{2}\right) \text{倍する。} \right)$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 7 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第3行を (-2) 倍，6 倍して，それぞれ第1行，第2行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第2行と第3行を入れ替える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第 3 行をそれぞれ第 1 行，第 2 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これに対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x \qquad\quad + 3w = 6 \\ \quad y \qquad + 4w = 7 \\ \qquad\quad z + 4w = 7 \end{cases}$$

だから $w = t$ とすると求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。

問題 2.3.5． 次の連立 1 次方程式を掃き出し法を使って解け.

(1) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x - y - z + 2w = 0 \\ 3x + z + 4w = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$

(解答例)

(1) 係数行列 A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

（第 1 行を (-1) 倍，(-3) 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

（第 2 行を $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍する。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

（第 2 行を (-2) 倍，6 倍して，それぞれ第 1 行，第 3 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$$

これに対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{3}w = 0 \\ y - \dfrac{2}{3}w = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

だから $w = -3t$ とすると求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。

(2) 係数行列 A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍，1 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を 1 倍，} (-1) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行と第 2 行を入れ替え，} \\ \text{さらに第 2 行と第 3 行を} \\ \text{入れ替える。} \end{array}\right)$$

これに対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

だから $z = t$ とすると求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。

問題 2.4.1. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -7 & 6 \\ -3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad \left(\text{第 1 行を第 2 行に加える。}\right)$$

これより $\operatorname{rank} A = 2$ である。

(2) 与えられた行列を A とすると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & 1 & -7 & 6 \\ -3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

(第 1 行を (-2) 倍，1 倍，3 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行，第 4 行に加える。)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(第 2 行を (-3) 倍，1 倍して，それぞれ第 3 行，第 4 行に加える。)

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより $\operatorname{rank} A = 2$ である。

(3) 与えられた行列を A とすると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(第 3 行を (-2) 倍して第 4 行に加える。)

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(第 1 行と第 3 行を入れ替え，さらに第 2 行と第 3 行を入れ替える。)

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍，4 倍} \\ \text{して，それぞれ第 3 行,} \\ \text{第 4 行に加える。}\end{array}\right)$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\left(\text{第 3 行を } \left(\frac{1}{3}\right) \text{ 倍する。}\right)$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 4 行に加える。}\end{array}\right)$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

これより $\operatorname{rank} A = 4$ である。

問題 2.4.2. 次の連立 1 次方程式を掃き出し法を用いて解け.

(1) $\begin{cases} 2x - 3y - z = -2 \\ x + y + z = 3 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x - 3y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 4y - 2z = -11 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -3x + 2y + 5z = 2 \\ x + y - 2z = 3 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$

(解答例)

(1) 拡大係数行列 $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
(A \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right)
$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍，} (-4) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行,} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right)$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -9 & -12 \end{array}\right)
$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 1 行，第 3 行をそれぞれ} \\ \left(-\frac{1}{5}\right) \text{倍，} \left(-\frac{1}{6}\right) \text{倍する。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$\left(\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える。}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍，} \left(-\frac{3}{5}\right) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 拡大係数行列 $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 & -11 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を } (-2) \text{ 倍，} (-3) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -20 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第 3 行を } \left(\frac{1}{5}\right) \text{ 倍する。}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を 3 倍，} (-7) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 23 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } \left(\frac{1}{4}\right) \text{ 倍して，} \\ \text{第 2 行と第 3 行を入れ} \\ \text{替える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{4} \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を 2 倍，1 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{23}{4} \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 23 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を 3 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -16 & 16 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を } (-5) \text{ 倍，} (-1) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\text{第 1 行を } \left(-\tfrac{1}{16}\right) \text{ 倍する。}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を 5 倍，} (-3) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行と第 2 行を入れ替え，} \\ \text{さらに第 2 行と第 3 行を} \\ \text{入れ替える。} \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 2.4.3. 次の連立１次方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + y + z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -1 \\ x + 2y - 3z = 2 \\ x + 3y - 5z = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z + 2w = 0 \\ 3x + z + 4w = 0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x - y + z + w = 2 \\ x - 2y + 2w = 1 \\ x + y + z + w = -1 \end{cases}$

(解答例)

(1) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

（第３行を (-1) 倍，(-2) 倍して，それぞれ第１行，第２行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

（第２行を第１行，第３行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

（第１行と第３行を入れ替える。第２行を (-1) 倍する。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これに対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

だから $z = t$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。

(2) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

（第２行を (-2) 倍，(-1) 倍して，それぞれ第１行，第３行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

（第３行を 7 倍，(-2) 倍して，それぞれ第１行，第２行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccr|r} 0 & 0 & -4 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$\left(\text{第 1 行を} \left(-\frac{1}{4}\right) \text{倍する。} \right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccr|r} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

（第 1 行を (-1) 倍，2 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|r} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

（第 1 行と第 2 行を入れ替え，さらに第 2 行と第 3 行を入れ替える。）

$$\to \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

これより求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 係数行列 A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

（第 1 行を (-1) 倍，(-3) 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

（第 2 行を (-2) 倍して第 3 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\left(\text{第 2 行を} \left(-\frac{1}{3}\right) \text{倍する。} \right)$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（第 2 行を (-2) 倍して第 1 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これに対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + \dfrac{1}{3}z + \dfrac{4}{3}w = 0 \\ \phantom{x+{}} y + \dfrac{4}{3}z - \dfrac{2}{3}w = 0 \end{cases}$$

だから $z=-3s,\ w=-3t$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

である。

(4) 拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

（第3行を (-2) 倍，(-1) 倍して，それぞれ第1行，第2行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

（第2行を (-1) 倍して第1行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

（第1行を $\left(-\frac{1}{2}\right)$ 倍，第2行を $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍する。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

（第1行を $\frac{1}{3}$ 倍，(-1) 倍して，それぞれ第2行，第3行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第2行を (-1) 倍して第3行に加える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

（第1行と第3行を入れ替える。）

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

これに対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}z = 1 \\ y + \dfrac{1}{3}z = -1 \\ \phantom{x+y+\dfrac{1}{3}z} w = -1 \end{cases}$$

だから $z=-3t$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

問題 2.4.4. 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とし，$(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
\begin{aligned}
(A\,|\,E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

(第 1 行を (-2) 倍，(-1) 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。)

(第 2 行を第 3 行に加える。)

(第 3 行を $\frac{1}{7}$ 倍する。)

(第 3 行を 1 倍，(-5) 倍して，それぞれ第 1 行，第 2 行に加える。)

これより求める逆行列は

$$
A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

である。

(2) 与えられた行列を A とし，$(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$
\begin{aligned}
(A\,|\,E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

(第 2 行を (-1) 倍して第 3 行に加える。)

(第 1 行を (-1) 倍して第 3 行に加える。)

(第 3 行を (-1) 倍して第 1 行に加える。)

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \Big(\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える。}\Big)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 与えられた行列を A とし，$(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \Big(\text{第 2 行を第 3 行に加える。}\Big)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。}\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

これより求める逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

問題 2.5.1. 列ベクトル表示された行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ について，基本行列

$$E(i;\,\lambda), \qquad E(i,\,j), \qquad E(i,\,j;\,\lambda)$$

を右からかけた行列

$$AE(i;\,\lambda), \qquad AE(i,\,j), \qquad AE(i,\,j;\,\lambda)$$

はそれぞれどのように表されるか．この操作を行列の**列に関する基本変形**という．

(解答例)

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対して

$$A\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

である。基本行列 $E(i;\lambda)$ は基本ベクトルを用いて

$$E(i;\lambda) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

と表せるから

$$\begin{aligned} AE(i;\lambda) &= (A\boldsymbol{e}_1, \ldots, \lambda\,A\boldsymbol{e}_i, \ldots, A\boldsymbol{e}_n) \\ &= (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n). \end{aligned}$$

ゆえに $AE(i;\lambda) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ となる。

同様に

$$E(i,j) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{e}_n),$$
$$E(i,j;\lambda) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

と表せるから

$$AE(i,j) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n),$$
$$AE(i,j;\lambda) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \lambda\,\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

となる。

(注意) これより

(1) $AE(i;\lambda)$ は行列 A の第 i 列を λ 倍した行列である。

(2) $AE(i,j)$ は行列 A の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列である。

(3) $AE(i,j;\lambda)$ は行列 A の第 j 列に第 i 列の λ 倍を加えた行列である。

問題 2.5.2． (m,n) 行列 A を被約階段行列とし，$\mathrm{rank}\, A = k$ とする．このとき A に列に関する基本変形を繰り返すことのよって次の形の行列に変形できることを示せ．

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}_{m,\,n} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_k,\, \mathbf{o}, \cdots, \mathbf{o})_{m,\,n}$$

この行列 R_k は左上部分に k 次単位行列を含みあとの成分は 0 となる (m,n) 行列である．このことから次のことがわかる．

任意の (m,n) 行列 X はある正則行列 P, Q によって $PXQ = R_k$ に変形される．

このことから，

$$\mathrm{rank}\,({}^tA) = \mathrm{rank}\, A$$

であることもわかる．

(解答例)

(m,n) 行列 A は被約階段行列であり，$\mathrm{rank}\, A = k$ だから

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 0 & *\cdots* \\ & & & & & & & 1 & *\cdots* \\ & & 0 & & & & & 0 & 0\cdots0 \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} k \end{array}$$

と表せる。$i = 1, 2, \ldots, k$ に対して，第 n_i 列を定数倍して他の列に加えることで第 i 行の $*$ 部分の成分をすべて 0 にすることができるから，行列 A の $*$ 部分はすべて 0 にできる。さらに第 n_i 列を第 i 列と入れ替えると行列 A は

$$R_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{m,n} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \mathbf{o}, \ldots, \mathbf{o})_{m,n}$$

の形の行列に変形される。

任意の (m,n) 行列 X は，正則行列 P により被約階段行列 A に変形されるから

$$PX = A$$

と表せる。上で示したように被約階段行列 A に対して，列に関する基本変形を行うと R_k に変形される。これは被約階段行列 A に対して有限個の基本行列を右からかけることに対応している。この有限個の基本行列の積を Q とすると

$$PXQ = AQ = R_k$$

となる。ここで R_k は対称行列だから $R_k = {}^tR_k = {}^t(PXQ) = {}^tQ{}^tX{}^tP$ より

$$\mathrm{rank}\,({}^tX) = \mathrm{rank}\,X$$

である。

問題 2.5.3． 実数 k の取り方により，次の行列の階数はどのように変わるかを基本変形によって調べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 2 & -3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とし，A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ k & 2 & -3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

（第 1 行を $(-k)$ 倍，(-1) 倍して，それぞれ第 2 行，第 3 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k+2 & -2k-3 \\ 0 & 2 & k-2 \end{pmatrix}$$

（第 3 行を $\frac{1}{2}$ 倍する。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k+2 & -2k-3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(k-2) \end{pmatrix}$$

（第 3 行を $-(k+2)$ 倍して第 2 行に加える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k^2+4k+2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(k-2) \end{pmatrix}$$

（第 2 行と第 3 行を入れ替える。）

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(k-2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(k^2+4k+2) \end{pmatrix}$$

ここで，$k^2+4k+2=0$ より $k=-2\pm\sqrt{2}$ だから行列 A の階数は

$$\mathrm{rank}\,A = \begin{cases} 2 & (k = -2\pm\sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 3 & (k \neq -2\pm\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

(2) 与えられた行列を A とし，A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -k(k-1) \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍，} (-k) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

これより行列 A の階数は

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 1 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k = 0 \text{ のとき}) \\ 3 & (k \neq 0,\ 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

(3) 与えられた行列を A とし，A に対して行に関する基本変形を行うと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & -(k-1) \\ 0 & -(k-1) & -(k-1)(k+1) \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍，} (-k) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 2 行，} \\ \text{第 3 行に加える。} \end{array}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & -(k-1) \\ 0 & 0 & -(k-1)(k+2) \end{pmatrix} \quad \left(\text{第 2 行を第 3 行に加える。}\right)$$

これより行列 A の階数は

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 1 & (k = 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k = -2 \text{ のとき}) \\ 3 & (k \neq -2,\ 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

問題 3.1.1． 座標平面の原点を O とし，3 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$, $\mathrm{C}(a_1+b_1, a_2+b_2)$ をとる． このとき平行四辺形 OACB の面積は行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられることを示せ.

(解答例)

$\angle\mathrm{AOB} = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $\frac{1}{2}||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta$ だから平行四辺形 OACB の面積 S は

$$S = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta$$

である。$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ より

$$\begin{aligned}
S^2 &= ||\boldsymbol{a}||^2 \cdot ||\boldsymbol{b}||^2 \sin^2\theta \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2 \cdot ||\boldsymbol{b}||^2 (1-\cos^2\theta) \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2 \cdot ||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\
&= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - (a_1^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_2^2) \\
&= a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)^2.
\end{aligned}$$

これより平行四辺形 OACB の面積は $S = |\,a_1b_2 - a_2b_1\,|$ となり

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

の絶対値に等しい。

問題 3.2.3． 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 置換の合成 $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ を求めよ.

(2) 逆置換 σ^{-1} を求めよ.

(3) σ を互換の積で表せ.

(解答例)

(1) 置換の合成の定義から

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \sigma(\tau(4)) & \sigma(\tau(5)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(3) & \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(5) & \sigma(4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & \tau(\sigma(3)) & \tau(\sigma(4)) & \tau(\sigma(5)) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \tau(2) & \tau(4) & \tau(1) & \tau(5) & \tau(3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) 逆置換の定義から

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) 次の表を考える。

	2	4	1	5	3
τ_{35}	2	4	1	3	5
τ_{34}	2	3	1	4	5
τ_{13}	2	1	3	4	5
τ_{12}	1	2	3	4	5

これを逆にたどると 4 つの互換の積

$$\sigma = \tau_{35}\,\tau_{34}\,\tau_{13}\,\tau_{12}$$

となる。

問題 3.2.4. 次の置換について，その符号を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた置換を σ とし，次の表を考える。

	3	1	2
τ_{23}	2	1	3
τ_{12}	1	2	3

これを逆にたどると 2 つの互換の積

$$\sigma = \tau_{23}\,\tau_{12}$$

となる。これより $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^2 = 1$ である。

(2) 与えられた置換を σ とし，次の表を考える。

	4	5	3	1	2
τ_{25}	4	2	3	1	5
τ_{14}	1	2	3	4	5

これを逆にたどると 2 つの互換の積

$$\sigma = \tau_{25}\,\tau_{14}$$

となる。これより $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^2 = 1$ である。

(3) 与えられた置換を σ とし，次の表を考える。

	n	1	2	3	$\cdots$	$n-1$
τ_{1n}	1	n	2	3	$\cdots$	$n-1$
τ_{2n}	1	2	n	3	$\cdots$	$n-1$
$\vdots$				$\vdots$		
τ_{n-1n}	1	2	3	4	$\cdots$	n

これを逆にたどると $(n-1)$ 個の互換の積

$$\sigma = \tau_{1n}\,\tau_{2n}\cdots\tau_{n-1n}$$

となる。これより

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{n-1}$$

である。

問題 3.3.2. 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix}$

(解答例)

(1) サラスの方法より

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\times3\times3 + 0\times4\times1 + 0\times2\times2 \\ -(1\times4\times2 + 0\times2\times3 + 0\times3\times1) = 1.$$

(2) サラスの方法より

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9 + 4\times8\times3 + 7\times2\times6 \\ -(1\times8\times6 + 4\times2\times9 + 7\times5\times3) = 0.$$

(3) サラスの方法より

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)\times 1\times 2 + 2\times(-2)\times 1 + 1\times 3\times 5 \\ &\quad -\{(-1)\times(-2)\times 5 + 2\times 3\times 2 + 1\times 1\times 1\} = -14.\end{aligned}$$

(4) サラスの方法より

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} &= 5\times 3\times 4 + 2\times 1\times 4 + 5\times 1\times 1 \\ &\quad -(5\times 1\times 1 + 2\times 1\times 4 + 5\times 3\times 4) = 0.\end{aligned}$$

(5) サラスの方法より

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} &= 1\times a\times 1 + a\times 0\times 3 + (-1)\times 2\times a \\ &\quad -\{1\times 0\times a + a\times 2\times 1 + (-1)\times a\times 3\} = 0.\end{aligned}$$

問題 3.4.4. 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ について，$\boldsymbol{a}_i = \lambda_1\,\boldsymbol{a}_k + \lambda_2\,\boldsymbol{a}_j$ であるとき $|\,A\,| = 0$ を示せ．ただし，$i \neq k$, $i \neq j$ とする．

(解答例)

行列 A に対して $\boldsymbol{a}_i = \lambda_1\,\boldsymbol{a}_k + \lambda_2\,\boldsymbol{a}_j$ $(i \neq k,\ i \neq j)$ とすると

$$\begin{aligned}\det A &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda_1\,\boldsymbol{a}_k + \lambda_2\,\boldsymbol{a}_j \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \lambda_1 \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\quad + \lambda_2 \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

これより $|\,A\,| = 0$ である。

問題 3.4.5. 次の行列式の値を求めよ.

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad (3)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

(解答例)

(1) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行，第 3 行，第 4 行}\\ \text{を第 1 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 1 行から 6 をだした。}\right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-3) \text{ 倍，} (-2) \text{ 倍，}\\ (-1) \text{ 倍して，それぞれ第 2 行，}\\ \text{第 3 行，第 4 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を 3 倍，1 倍して}\\ \text{それぞれ第 2 行，第 4 行}\\ \text{に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 行を 2 倍して}\\ \text{第 2 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= -6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行と第 4 行}\\ \text{を入れ替えた。}\end{array}\right)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行と第 3 行}\\ \text{を入れ替えた。}\end{array}\right)$$

$$= 6 \times 1 \times 1 \times 4 \times (-4) = -96.$$

(2) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 & 7 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を 2 倍，3 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 3 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 行を } (-4) \text{ 倍，} (-2) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，} \\ \text{第 3 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行と第 4 行} \\ \text{を入れ替えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行と第 2 行} \\ \text{を入れ替えた。}\end{array}\right)$$

$$= (-1) \times 1 \times 3 \times 3 = -9.$$

(3) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 3 行を第 2 行に加えた。}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-2) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を 4 倍，} (-2) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 3 行，} \\ \text{第 4 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 行を 5 倍して} \\ \text{第 3 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -77 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を 4 倍して} \\ \text{第 4 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= (-1) \times 1 \times 1 \times (-77) = 77.$$

問題 3.4.6． 次の行列式の値を求め，因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & a & -b \\ x^2 & -a^2 & b^2 \\ a+b & x-b & a-x \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \\ 1 & a+b & c & 0 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x & b & b & b \\ x & y & c & c \\ x & y & z & d \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

(解答例)

(1) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

(第 1 列を (-1) 倍して，それぞれ第 2 列，第 3 列に加える。)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix}$$

(第 2 列と第 3 列の成分を因数分解する。)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -(x-y) & z-x \\ x^2 & -(x-y)(x+y) & (z-x)(z+x) \end{vmatrix}$$

(第 2 列と第 3 列から因子をだす。)

$$= (x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 \\ x^2 & -(x+y) & z+x \end{vmatrix}$$

(第 2 列を第 3 列に加える。)

$$= (x-y)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ x^2 & -(x+y) & -(y-z) \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

(2) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

(第 2 列，第 3 列を第 1 列に加える。)

$$= \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & z & x \\ x+y+z & x & y \end{vmatrix}$$

(第 1 列の因子をだす。)

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & z & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}$$

(第 1 行を (-1) 倍して第 2 行，第 3 行に加える。)

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & z-y & x-z \\ 0 & x-y & y-z \end{vmatrix}$$

（系 3.5.(1) を用いる。）

$$= (x+y+z)\begin{vmatrix} z-y & x-z \\ x-y & y-z \end{vmatrix}$$

$$= (x+y+z)\{(z-y)(y-z)-(x-y)(x-z)\}$$

$$= -(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

(3) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} x & a & -b \\ x^2 & -a^2 & b^2 \\ a+b & x-b & a-x \end{vmatrix}$$

（第 2 列を第 1 列に加える。）

$$= \begin{vmatrix} x+a & a & -b \\ x^2-a^2 & -a^2 & b^2 \\ x+a & x-b & a-x \end{vmatrix}$$

（第 1 列の因子をだす。）

$$= (x+a)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ x-a & -a^2 & b^2 \\ 1 & x-b & a-x \end{vmatrix}$$

（第 1 行を (-1) 倍して第 3 行に加える。）

$$= (x+a)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ x-a & -a^2 & b^2 \\ 0 & x-a-b & -(x-a-b) \end{vmatrix}$$

（第 3 行の因子をだす。）

$$= (x+a)(x-a-b)\begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ x-a & -a^2 & b^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

（第 3 列を第 2 列に加える。）

$$= (x+a)(x-a-b)\begin{vmatrix} 1 & a-b & -b \\ x-a & -(a^2-b^2) & b^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

（第 2 列の因子をだす。）

$$= (a-b)(x+a)(x-a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -b \\ x-a & -(a+b) & b^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

（第 1 行を $-(x-a)$ 倍して第 2 行に加える。）

$$= (a-b)(x+a)(x-a-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -b \\ 0 & -(x+b) & -x+a+b^2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(x+a)(x+b)(x-a-b).$$

(4) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \\ 1 & a+b & c & 0 \end{vmatrix}$$

（第 1 列，第 2 列，第 3 列を第 4 列に加える。）

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+1 \\ 1 & b & c & a+b+c+1 \\ 1 & c & a & a+b+c+1 \\ 1 & a+b & c & a+b+c+1 \end{vmatrix} && \left(\text{第４列の因子をだす。}\right) \\
&= (a+b+c+1) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & a & 1 \\ 1 & a+b & c & 1 \end{vmatrix} && \left(\text{系 3.10.(2) を用いる。}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(5) 行列式の性質を用いると

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ x & b & b & b \\ x & y & c & c \\ x & y & z & d \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第３列を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第４列に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} a & a & a & 0 \\ x & b & b & 0 \\ x & y & c & 0 \\ x & y & z & d-z \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第２列を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第３列に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ x & b & 0 & 0 \\ x & y & c-y & 0 \\ x & y & z-y & d-z \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第１列を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第２列に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ x & b-x & 0 & 0 \\ x & y-x & c-y & 0 \\ x & y-x & z-y & d-z \end{vmatrix} \\
&= a(b-x)(c-y)(d-z).
\end{aligned}
$$

(6) 行列式の性質を用いると

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第２列，第３列，第４列} \\ \text{を第１列に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & b & a \end{vmatrix} && \left(\text{第１列の因子をだす。}\right)
\end{aligned}
$$

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}
$$

（第 1 行を (-1) 倍して それぞれ第 2 行，第 3 行，第 4 行に加える。）

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

（系 3.5.(1) を用いる。）

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 2 列を第 1 列に加える。）

$$
= (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b-c+d & d-c & c-d \\ a-b-c+d & a-c & b-d \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 1 列の因子をだす。）

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 1 & a-c & b-d \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 1 行を (-1) 倍して 第 2 行に加える。）

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & d-c & c-d \\ 0 & a-d & b-c \\ 0 & b-c & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 3 列を第 2 列に加える。）

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-d \\ 0 & a+b-c-d & b-c \\ 0 & a+b-c-d & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 2 列の因子をだす。）

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-d \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & 1 & a-d \end{vmatrix}
$$

（第 2 行を (-1) 倍して 第 3 行に加える。）

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & c-d \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & 0 & a-b+c-d \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d).
$$

問題 3.4.7. 次の行列 $A,\ B$ について，行列式 $|\,A\,|,\ |\,B\,|,\ |\,AB\,|,\ |\,BA\,|$ を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(解答例)

行列 $A,\ B$ の行列式を求める。

$$\begin{aligned}
|\,A\,| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍，1 倍して} \\ \text{それぞれ第 1 行，第 3 行} \\ \text{に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} && \left(\text{第 1 行を第 3 行に加える。}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} && \left(\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える。}\right) \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 25.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\,B\,| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-2) \text{ 倍，} (-1) \text{ 倍して} \\ \text{それぞれ第 2 行，第 3 行} \\ \text{に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} && \left(\text{第 3 行を第 2 行に加える。}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} && \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3.
\end{aligned}$$

これより

$$|\,A\,| = 25, \qquad |\,B\,| = -3$$

である。

次に行列の積 $AB,\ BA$ はそれぞれ

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 21 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \\ 0 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

だから行列式は

$$|\,AB\,| = \begin{vmatrix} 4 & 14 & 21 \\ 5 & -4 & 8 \\ 6 & -3 & 12 \end{vmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 14 & 21 \\ 5 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を } (-4) \text{ 倍，} (-5) \text{ 倍} \\ \text{して，それぞれ第 1 行，第 2 行} \\ \text{に加える。}\end{array}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 0 & -9 & -12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\left(\text{第 2 行を第 1 行に加える。}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & -12 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\left(\text{第 1 行を 9 倍して第 2 行に加える。}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -75 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$\left(\text{第 1 行と第 3 行を入れ替える。}\right)$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -75 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$\left(\text{第 2 行と第 3 行を入れ替える。}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -75 \end{vmatrix}$$

$$= -75.$$

$$|\,BA\,| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \\ 0 & 20 & 9 \end{vmatrix}$$

$\left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-4) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 行に加える。}\end{array}\right)$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix}$$

$\left(\text{第 1 行と第 2 行を入れ替える。}\right)$

$$
= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 11 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix}
$$
$$
= -75.
$$

これより

$$
|\,AB\,| = |\,BA\,| = -75
$$

である。

問題 3.4.8. 次の行列 $A,\ B$ について，行列式 $|\,AB\,|,\ |\,BA\,|$ を求めよ．

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}
$$

(解答例)

行列の積 $AB,\ BA$ はそれぞれ

$$
AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 21 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}
$$

だから行列式は

$$
|\,AB\,| = \begin{vmatrix} 3 & 14 & 21 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}
$$
$$
= \begin{vmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 2 行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array} \right)
$$
$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l} \text{第 3 行を 2 倍して} \\ \text{第 1 行に加える。} \end{array} \right)
$$
$$
= 0. \qquad \left(\text{命題 3.3.(3) を用いる。} \right)
$$

$$
|\,BA\,| = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 13.
$$

これより

$$|AB| = 0, \qquad |BA| = 13$$

である。

問題 3.5.4. 次の行列は正則行列であることを確かめ，その逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

である。$|A| = 2\,(\neq 0)$ より行列 A は正則である。次に余因子を求めると

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

これより求める逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(1) **(別解)**　$|A| = 2\,(\neq 0)$ より行列 A は正則であるから，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

これより

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

である。$|A| = -10\,(\neq 0)$ より行列 A は正則である。次に余因子を求めると

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

これより求める逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

である。

(2) **(別解)**　$|A| = -10\,(\neq 0)$ より行列 A は正則であるから，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -6 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 6 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} \end{array}\right).$$

これより

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

だから行列 A は正則でない。これより逆行列は存在しない。

(4) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

である。$|A| = 25\,(\neq 0)$ より行列 A は正則である。次に余因子を求めると

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10,$$

$$\Delta_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -16 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$\Delta_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\Delta_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

これより求める逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 9 & 16 \\ 5 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

である。

(4) **(別解)**　$|A| = 25\,(\neq 0)$ より行列 A は正則であるから，行列 $(A\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(A\,|\,E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{25} & \frac{2}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array}\right).$$

これより

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 9 & 16 \\ 5 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

である。

問題 3.6.2. クラメールの公式を用いて次の連立１次方程式を解け.

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & = & -5 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 3 \end{array}\right. \qquad (2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & & & = & 1 \\ & & y & & & - & 2w & = & -2 \\ x & + & 3y & + & z & + & 2w & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & + & w & = & 4 \end{array}\right.$$

(解答例)

(1) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

であるから A は正則である。クラメールの公式より

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -14 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -\frac{28}{|A|} = \frac{14}{5},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = \frac{14}{|A|} = -\frac{7}{5},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -18 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = \frac{36}{|A|} = -\frac{18}{5}$$

となる。これより解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -18 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

であるから A は正則である。クラメールの公式より

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{18}{|A|} = -6,$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{6}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{6}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{12}{|A|} = 4,$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 15 & 14 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{27}{|A|} = -9,
$$

$$
w = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{9}{|A|} = 3
$$

となる。これより解は

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

である。

問題 3.7.1． ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ について，次の等式を示せ.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

(解答例)

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ より

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = \det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})
$$

となるから $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が得られる。

(2) (1) と同様にして

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})
$$

となり (2) の等式が示された。

問題 3.7.3． 2点 A, B を通る直線と，2点 C, D を通る直線が同一平面上にないとき，この2直線の距離 d は

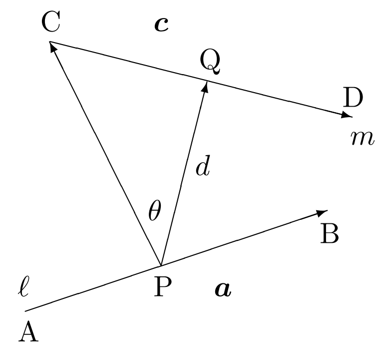
$$d = \frac{|\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})\,|}{||\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}\,||}$$

であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とする．

(解答例)

2点 A, B を通る直線を ℓ，2点 C, D を通る直線を m とし，この 2 直線に垂直な直線と ℓ, m との交点をそれぞれ P, Q とする。またベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ のなす角を θ $(0 \le \theta < \pi)$ とする。このとき，$\dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}}{||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}||}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に平行な単位ベクトルであるから

$$d = ||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|| = ||\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\,\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \overrightarrow{\mathrm{PC}})}{||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}||}.$$



ここで $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であり，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから

$$d = \frac{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})}{||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}||}$$

となる。角 θ を $\pi \le \theta < 2\pi$ のときも考えると

$$d = \frac{|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})|}{||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}||}$$

である。

問題 3.8.2． 座標平面上の異なる2点 $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$ を通る直線の方程式は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

直線の方程式は $ax + by + c = 0$ で与えられる。これは

$$(x,\, y,\, 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

と表せる。この直線が異なる 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通るとき

$$(x_1, y_1, 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0, \qquad\qquad (x_2, y_2, 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

を満たす。これより斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

が得られる。ここで $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ より，この斉次連立 1 次方程式は自明でない解をもつから

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を得る。

問題 3.8.2. (別解)

異なる 2 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) を通る直線の方程式は $x_1 \neq x_2$ のとき

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

で与えられる。両辺に $x_2 - x_1$ をかけて整理すると

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

となる。この直線の方程式は $x_1 = x_2$ の場合も成り立つ。これは

$$\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

と表せるから

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

が得られる。

問題 3.8.3． 座標平面上の相異なる 3 点 $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$, $(x_3,\, y_3)$ を通る円の方程式は

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

円の方程式は $x^2+y^2+ax+by+c=0$ で与えられる。これは

$$(x^2+y^2,\, x,\, y,\, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

と表せる。この円が異なる 3 点 $(x_i,\, y_i)$ $(i=1,2,3)$ を通るとき

$$(x_i^2+y_i^2,\, x_i,\, y_i,\, 1)\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

を満たす。これより斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

が得られる。ここで $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ より，この斉次連立 1 次方程式は自明でない解をもつから

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2+y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

を得る。

問題 3.9.1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ を互換の積で表し，この置換の符号を求めよ．

(解答例)

次の表を考える。

	3	5	2	7	1	4	6
τ_{67}	3	5	2	6	1	4	7
τ_{46}	3	5	2	4	1	6	7
τ_{15}	3	1	2	4	5	6	7
τ_{23}	2	1	3	4	5	6	7
τ_{12}	1	2	3	4	5	6	7

これを逆にたどると 5 つの互換の積

$$\sigma = \tau_{67}\,\tau_{46}\,\tau_{15}\,\tau_{23}\,\tau_{12}$$

となる。これより $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^5$. ゆえに

$$\operatorname{sgn}\sigma = -1.$$

問題 3.9.2. 次の置換 σ および，この逆置換 σ^{-1} を互換の積で表せ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(解答例)

次の表を考える。

	5	3	1	7	2	4	6
τ_{67}	5	3	1	6	2	4	7
τ_{46}	5	3	1	4	2	6	7
τ_{25}	2	3	1	4	5	6	7
τ_{13}	2	1	3	4	5	6	7
τ_{12}	1	2	3	4	5	6	7

これを逆にたどると 5 つの互換の積

$$\sigma = \tau_{67}\,\tau_{46}\,\tau_{25}\,\tau_{13}\,\tau_{12}$$

となる。また，$\sigma^{-1}\sigma = \boldsymbol{e}$，$\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$ より，逆置換 σ^{-1} は

$$\sigma^{-1} = \tau_{12}\,\tau_{13}\,\tau_{25}\,\tau_{46}\,\tau_{67}$$

である。

問題 3.9.3. 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 17 & 5 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(解答例)

(1) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4. \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{それぞれ第 2 行，第 3 行} \\ \text{に加えた。}\end{array}\right)$$

(2) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を 2 倍，3 倍して} \\ \text{それぞれ第 1 行，第 2 行} \\ \text{に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 2 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -29 \\ 0 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を 3 倍して} \\ \text{第 1 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & -29 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行と第 3 行を} \\ \text{入れ替えた。}\end{array}\right)$$

$$= 29.$$

(3) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行，第 3 行，第 4 行} \\ \text{を第 1 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{第 1 行から 3 をだした。}\right)$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{それぞれ第 2 行，第 3 行，} \\ \text{第 4 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= -3.$$

(4) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 列を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 列に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 行をそれぞれ第 1 行，} \\ \text{第 2 行に加え，また第 4 行} \\ \text{を } (-1) \text{ 倍して第 3 行に} \\ \text{加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 3 行を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-2) \text{ 倍して} \\ \text{第 1 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行と第 4 行，第 2 行} \\ \text{と第 3 行をそれぞれ入れ} \\ \text{替えた。}\end{array}\right)$$

$$= -5.$$

(5) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 17 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{第 4 行に加えた。}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 列を } (-3) \text{ 倍して} \\ \text{第 3 列に加えた。}\end{array}\right)$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{第4行を第1行に加えた。}\right)
$$

$$
= 0.
$$

(6) 行列式の性質を用いると

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第2行を }(-1)\text{ 倍して} \\ \text{第4行に加え，第3行を} \\ \text{第1行に加えた。}\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第3行を 2 倍して} \\ \text{第2行に加え，第4行} \\ \text{を第1行に加えた。}\end{array}\right)
$$

$$
= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第1行と第3行，第2行} \\ \text{と第4行を入れ替え，} \\ \text{さらに第3行と第4行を} \\ \text{入れ替えた。}\end{array}\right)
$$

$$
= -2.
$$

問題 3.9.4． 次の行列式を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a+b & a+3b & a+5b \\ a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c+d & d+a & a+b & c+b \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$

(解答例)

(1) 行列式の性質を用いると

$$
\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第2列，第3列，第4列} \\ \text{を第1列に加える。}\end{array}\right)
$$

$$= \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(第 1 列から $(x+3)$ をだす。)

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(第 1 行を (-1) して それぞれ第 2 行，第 3 行，第 4 行に加える。)

$$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x+3)(x-1)^3.$$

(2) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} a+b & a+3b & a+5b \\ a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \end{vmatrix}$$

(第 2 行を (-1) 倍して第 1 行に加える。)

$$= \begin{vmatrix} -b & -b & -b \\ a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \end{vmatrix}$$

(第 3 行を (-1) 倍して第 2 行に加える。)

$$= \begin{vmatrix} -b & -b & -b \\ -b & -b & -b \\ a+3b & a+5b & a+7b \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

(3) 行列式の性質を用いると (紙面の関係で行と列を入れ替える。)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c+d & d+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

(行と列を入れ替える。)

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & c+b \end{vmatrix}$$

(第 1 列，第 3 列，第 4 列を第 2 列に加える。)

$$= \begin{vmatrix} 1 & a+b+c+d+1 & b & c+d \\ 1 & a+b+c+d+1 & c & d+a \\ 1 & a+b+c+d+1 & d & a+b \\ 1 & a+b+c+d+1 & a & c+b \end{vmatrix}$$

(第 2 列から $a+b+c+d+1$ をだす。)

$$= (a+b+c+d+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b & c+d \\ 1 & 1 & c & d+a \\ 1 & 1 & d & a+b \\ 1 & 1 & a & c+b \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

(4) 第１行に関して展開すると

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{vmatrix}$$

$$= ad\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} - bc\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= (ad-bc)(eh-fg).$$

問題 3.9.5． 次の行列式を因数分解せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 2a+b+c & c & b \\ c & a+2b+c & a \\ b & a & a+b+2c \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

(解答例)

(1) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 2a+b+c & c & b \\ c & a+2b+c & a \\ b & a & a+b+2c \end{vmatrix}$$

（第２列，第３列を第１列に加える。）

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c & b \\ 2(a+b+c) & a+2b+c & a \\ 2(a+b+c) & a & a+b+2c \end{vmatrix}$$

（第１列から $2(a+b+c)$ をだす。）

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a+2b+c & a \\ 1 & a & a+b+2c \end{vmatrix}$$

（第１行を (-1) 倍してそれぞれ第２行，第３行に加える。）

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 0 & a+2b & a-b \\ 0 & a-c & a+2c \end{vmatrix}$$

（系 3.5.(1) を用いる。）

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+2b & a-b \\ a-c & a+2c \end{vmatrix}$$

$$= 6(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

(2) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

（第 1 列を (-1) 倍してそれぞれ第 2 列，第 3 列に加える。）

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

（第 2 列，第 3 列から因子をだす。）

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & a+b & a+c \\ a^3 & a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

（命題 3.3.(1) を用いる。）

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} a+b & a+c \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\{(a+b)(a^2+ac+c^2)-(a+c)(a^2+ab+b^2)\}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

(3) 行列式の性質を用いると

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

（第 1 列を (-1) 倍してそれぞれ第 2 列，第 3 列，第 4 列に加える。）

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

（命題 3.3.(1) を用いる。）

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

（行と列を入れ替える。）

$$= \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c-a & c^2-a^2 & c^4-a^4 \\ d-a & d^2-a^2 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

（第 1 行，第 2 行，第 3 行から，それぞれ因子をだす。）

$$
\begin{aligned}
&= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b & (a+b)(a^2+b^2) \\ 1 & a+c & (a+c)(a^2+c^2) \\ 1 & a+d & (a+d)(a^2+d^2) \end{vmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} \text{第1行を } (-1) \text{ 倍して} \\ \text{それぞれ第2行，第3行} \\ \text{に加える。} \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a) \\
&\quad \times \begin{vmatrix} 1 & a+b & (a+b)(a^2+b^2) \\ 0 & c-b & (c-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \\ 0 & d-b & (d-b)(a^2+b^2+d^2+ab+bd+da) \end{vmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} \text{第2行，第3行から} \\ \text{それぞれ因子をだす。} \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \\
&\quad \times \begin{vmatrix} 1 & a+b & (a+b)(a^2+b^2) \\ 0 & 1 & a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \\ 0 & 1 & a^2+b^2+d^2+ab+bd+da \end{vmatrix} \\
&\qquad \begin{pmatrix} \text{系 3.5.(1) を用いる。} \end{pmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \\
&\quad \times \begin{vmatrix} 1 & a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \\ 1 & a^2+b^2+d^2+ab+bd+da \end{vmatrix} \\
&= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \\
&\quad \times \{a^2+b^2+d^2+ab+bd+da-(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\} \\
&= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).
\end{aligned}
$$

問題 3.9.6． 次の行列の余因子行列を計算し，逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\cdot 4 = 4, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\cdot 1 = -1,$$
$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\cdot(-1) = 1, \qquad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}\cdot 3 = 3$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1,$$
$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, \qquad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-2) = -2$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。

(3) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 23,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 19, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -11, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 23 & -11 \\ 1 & 19 & -8 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

である。

(4) 与えられた行列を A とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

である。

(5) 与えられた行列を A とすると

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9, \qquad \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ -9 & -2 & 5 \\ -9 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|}\,\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ -9 & -2 & 5 \\ -9 & -10 & 7 \end{pmatrix}$$

である。

(6) 与えられた行列を A とすると

$$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

余因子は

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24, \qquad \Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \qquad \Delta_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

だから余因子行列 $\widetilde{A}$ は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

である。$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ より逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

である。

問題 3.9.7. 次の連立方程式の解をクラメールの公式を使って求めよ.

$$(1)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(3)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & -3 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \\ x & - & 4y & - & 3z & = & 10 \end{array}\right. \qquad (4)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & - & 3w & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & 5w & = & 0 \\ x & + & y & - & z & - & w & = & 1 \end{array}\right.$$

(解答例)

(1) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

であるから A は正則である。クラメールの公式から

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

よって

$$x = -\frac{1}{3}, \qquad y = \frac{2}{3}, \qquad z = -\frac{1}{3}$$

である。

(2) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = -12.$$

であるから A は正則である。クラメールの公式から

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \frac{5}{12},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{12}.$$

よって

$$x = \frac{5}{12}, \qquad y = -\frac{1}{12}, \qquad z = \frac{1}{12}$$

である。

(3) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

であるから A は正則である。クラメールの公式から

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{12}{3} = 4,$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 11 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{9}{3} = -3,$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \frac{6}{3} = 2.$$

よって

$$x = 4, \qquad y = -3, \qquad z = 2$$

である。

(4) 連立１次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。ここで A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 & -16 \\ 0 & 0 & -7 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & -1 & -16 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{vmatrix} = 48$$

であるから A は正則である。クラメールの公式から

$$x = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8},$$

$$y = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -4 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -33 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = \frac{33}{48} = \frac{11}{16},$$

$$z = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$w = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{3}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{48} = -\frac{3}{16}.$$

よって

$$x = \frac{1}{8}, \qquad y = \frac{11}{16}, \qquad z = 0, \qquad w = -\frac{3}{16}$$

である。

問題 3.10.1. A を (m,m) 型，B を (n,n) 型，C を (m,n) 型の行列とするとき，次の等式が成立することを証明せよ.

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |\,A\,| \cdot |\,B\,|$$

(解答例)

左辺の第 1 行から第 m 行において，行に関する基本変形 (命題 3.12 参照) を行うことで行列 A を上三角行列に変形できる。この操作は行に関して行うため行列 A の変形には行列 C の成分は影響しない。同様に，第 $(m+1)$ 行から第 $(m+n)$ 行において，行に関する基本変形を行うことで行列 B を上三角行列に変形できる。これらの操作により行列 $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ は上三角行列になるので，その行列式は対角成分を全てかけたものになる。第 1 行から第 m 行までの対角成分の積は行列 A の行列式 $|\,A\,|$ になり，第 $(m+1)$ 行から第 $(m+n)$ 行までの対角成分の積は行列 B の行列式 $|\,B\,|$ に等しいから，示すべき等式が得られる。

問題 3.10.2. 平面上の 3 直線

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & + & c_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2 & = & 0 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3 & = & 0 \end{cases}$$

が一点で交わるならば

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示せ.

(解答例)

平面上の 3 直線が一点 (x_0, y_0) で交わるとき連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3 = 0 \end{cases}$$

を満たす。これは

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

と表され，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ だから自明な解以外の解をもつ。これより

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

である。

問題 3.10.3. 上の結果を用いて 3 直線

$$\begin{cases} 2x & + & ay & = & 8 \\ 4x & - & y & = & 2 \\ ax & - & 5y & = & -7 \end{cases}$$

が一点で交わるように a を定めよ.

(解答例)

3 直線

$$\begin{cases} 2x + ay - 8 = 0 \\ 4x - \ \ y - 2 = 0 \\ ax - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

が一点で交わるには

$$\begin{vmatrix} 2 & a & -8 \\ 4 & -1 & -2 \\ a & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

である。サラスの方法を用いると $-2(a+21)(a-3) = 0$ であるから

$$a = -21, \quad 3$$

である。

問題 3.10.4. 3点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) をとおる 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x^2 & x & 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ は $ax^2 + bx + c - y = 0$ より

$$(x^2,\, x,\, 1,\, y) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

と表せる。この 2 次関数が異なる 3 点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ を通るとき

$$(x_i^2,\, x_i,\, 1,\, y_i) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

を満たす。これより斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x^2 & x & 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

が得られる。ここで $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ より，この斉次連立 1 次方程式は自明でない解をもつから

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \\ x^2 & x & 1 & y \end{vmatrix} = 0$$

を得る。

問題 3.10.5． 2 平面 $x-3y+z-1=0,\ 3x+y-5z+3=0$ の交線を含みかつ原点を通る平面の方程式を求めよ.

(解答例)

求める平面の方程式を $ax+by+cz=0$ とすると，この平面は与えられた 2 平面の交線を含むから連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 3x+y-5z=-3 \\ ax+by+cz=0 \end{cases}$$

の解の自由度は 1 である。これより拡大係数行列の階数は 2 である。行に関する基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -3 \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & 3a+b & -a+c & -a \end{pmatrix}$$

だから，$3a+b=10,\ -a+c=-8,\ -a=-6$ より $a=6,\ b=-8,\ c=-2$ である。これより求める平面の方程式は $6x-8y-2z=0$ より

$$3x-4y-z=0$$

である。

問題 3.10.5. (別解)

2 平面の交線を含む平面の方程式は

$$k(x-3y+z-1)+\ell(3x+y-5z+3)=0$$

とおける。これが原点を通るので $k=3\ell$ とすると，$\ell(6x-8y-2z)=0$ となるから，求める平面の方程式は

$$3x-4y-z=0$$

である。

問題 3.10.6． 次の n 次正方行列 A_n の行列式 $\det A_n$ を計算せよ．

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(解答例)

$\det A_n = x_n$ とおく。第 1 行に関して展開すると

$$x_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2x_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 項を第 1 列に}\\ \text{関して展開する。}\end{array}\right)$$

$$= 2x_{n-1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 項は } (n-2) \text{ 次の}\\ \text{行列式である。}\end{array}\right)$$

$$= 2x_{n-1} - x_{n-2}.$$

ゆえに

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

が得られる。ただし，

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

である。この数列 $\{x_n\}$ の一般項を求める。$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$ であるから $x_n - x_{n-1} = x_2 - x_1 = 1$ である。これより数列 $\{x_n\}$ は初項 $x_1 = 2$，公差 1 の等差数列であるから $x_n = n+1$ となる。したがって

$$\det A_n = n + 1$$

である。

問題 4.1.2. 例 4.1.1 (3) を確かめよ.

(解答例)

実数を係数にもつ変数 x の多項式全体 $\mathbf{R}[\,x\,]$ において，任意の $P(x),\ Q(x) \in \mathbf{R}[\,x\,]$ は

$$\begin{aligned} P(x) &= p_0x^n + p_1x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n, \\ Q(x) &= q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_{m-1}x + q_m \end{aligned}$$

と表せる。$m \leq n$ のとき，和 $P(x) + Q(x)$ およびスカラー倍 $rP(x)$ $(r \in \mathrm{R})$ を

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= p_0x^n + \cdots + p_{n-m-1}x^{m+1} + (p_{n-m} + q_0)x^m \\ &\qquad +(p_{n-m+1} + q_1)x^{m-1} + \cdots + (p_{n-1} + q_{m-1})x + (p_n + q_m), \\ rP(x) &= (rp_0)x^n + (rp_1)x^{n-1} + \cdots + (rp_{n-1})x + (rp_n) \end{aligned}$$

と定義すると。$P(x) + Q(x),\ rP(x) \in \mathbf{R}[\,x\,]$ である。実数 p_i, q_i, r_i に対して，$p_i + q_i = q_i + p_i,\ (p_i+q_i)+r_i = p_i+(q_i+r_i),\ p_i+0 = 0+p_i = p_i,\ p_i+(-p_i) = (-p_i)+p_i = 0$ であるから，和について交換法則および結合法則が成り立ち，零ベクトルおよび逆ベクトルが存在することが分かる。また実数 $r,\ s$ に対して，$(r+s)p_i = rp_i+sp_i,\ r(p_i+q_i) = rp_i+rq_i,\ (rs)p_i = r(sp_i),\ 1\,p_i = p_i$ よりスカラー倍に関する条件が成り立つ。これより上記の和およびスカラー倍について $\mathbf{R}[\,x\,]$ は $\mathbf{R}$ 上の線形空間になる。

問題 4.1.3. V を線形空間とするとき，次が成り立つことを示せ.

(1) V の零ベクトルはただ１つである.

(2) V のベクトルに対する逆ベクトルはただ１つである.

(3) ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ をみたすベクトル $\boldsymbol{z} \in V$ がただ１つ存在する.

(4) $0\,\boldsymbol{x} = \mathbf{o},\ r\,\mathbf{o} = \mathbf{o},\ (-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ (r はスカラー).

(解答例)

(1) $\mathbf{o},\ \mathbf{o}'$ を線形空間 V の２つの零ベクトルとすると，$\mathbf{o}+\mathbf{o}' = \mathbf{o} = \mathbf{o}'+\mathbf{o},\ \mathbf{o}'+\mathbf{o} = \mathbf{o}' = \mathbf{o}+\mathbf{o}'$ であるから

$$\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o}' = \mathbf{o}' + \mathbf{o} = \mathbf{o}'$$

となり，線形空間の零ベクトルはただ１つである。

(2) 線形空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルを $\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}'$ とすると，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \mathbf{o} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}' = \mathbf{o} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x}$ であるから

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \mathbf{o} = \boldsymbol{y} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}') = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}' = \mathbf{o} + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}'$$

となり，線形空間のベクトルに対する逆ベクトルはただ１つである。

(3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ より

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} + \mathbf{o} = \boldsymbol{z} + \{\boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{y})\} = (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) + (-\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) + (-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$$

だから $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{y})$ となるから，題意の $\boldsymbol{z}$ はただ１つである。

(4) スカラー倍についての定義式 $(r+s)\boldsymbol{x} = r\,\boldsymbol{x} + s\,\boldsymbol{x}$ において，$r = s = 0$ とすると $0+0=0$ より

$$0\,\boldsymbol{x} = 0\,\boldsymbol{x} + 0\,\boldsymbol{x}$$

より $0\,\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ である。同様に $r = -1,\, s = 1$ とすると

$$(-1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} = 0\,\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$$

より $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ である。

また $r(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = r\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{y}$ において，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{o}$ とすると $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ より

$$r\,\mathbf{o} = r\,\mathbf{o} + r\,\mathbf{o}$$

より $r\,\mathbf{o} = \mathbf{o}$ である。

問題 4.1.4． 線形空間 V の部分空間 W には，V の零ベクトル $\mathbf{o}$ が含まれることを示せ.

(解答例)

部分空間の条件 (2) において $r = 0$ とすると $0\,\boldsymbol{x} \in W$ である。$0\,\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ より $\mathbf{o} \in W$ である。

問題 4.1.6． 例 4.1.5 (4) の集合は部分空間であることを確かめよ.

(解答例)

$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \in W$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{o},\ A\boldsymbol{y} = \mathbf{o}$ であるから

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$$

となり $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ である。

$\boldsymbol{x} \in W,\ r \in K$ に対して

$$A(r\boldsymbol{x}) = r(A\boldsymbol{x}) = r\,\mathbf{o} = \mathbf{o}$$

となり $r\,\boldsymbol{x} \in W$ である。

これより解空間は $\mathbf{R}^n$ の部分空間である。

問題 4.1.7． $\mathbf{R}^3$ の部分集合 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x+y+z=1 \right\}$ は $\mathbf{R}^3$ の部分空間とならないことを示せ.

(解答例)

$\mathbf{R}^3$ の部分集合 W は零ベクトルを含まないので部分空間でない。

問題 4.1.8． 線形空間 V の部分空間の和集合 $W_1 \cup W_2$ は一般には部分空間にならない．この例を示せ.

(解答例)

$\mathbf{R}^2$ において，$\mathbf{R}^2$ の部分集合

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y=0 \right\} = \langle \, \boldsymbol{e}_1 \, \rangle \qquad (x \text{ 軸})$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x=0 \right\} = \langle \, \boldsymbol{e}_2 \, \rangle \qquad (y \text{ 軸})$$

を考えると和集合

$$W_1 \cup W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; y=0 \text{ または } x=0 \right\}$$

は x 軸および y 軸上の点全体である。このとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1 \cup W_2$ に対して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

であるから $\mathbf{R}^2$ の部分集合 W_1，W_2 の和集合 $W_1 \cup W_2$ は $\mathbf{R}^2$ の部分空間にならない。

問題 4.2.3． 次の３つのベクトルが１次独立かどうか判定し，１次従属ならば１つのベクトルを他のベクトルの１次結合として表せ.

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 行列 $A=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ の行列式を考えると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=4$$

となり $|A|\neq 0$ であるからベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は１次独立である。

(別解)　行列 A の階数を考えると

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank}A=3$ となり，ベクトルの個数と等しいので１次独立である。

(2) 行列 $A=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ の行列式を考えると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&2&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{vmatrix}=0$$

となり $|A|=0$ であるからベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は１次従属である。$k\boldsymbol{a}+\ell\boldsymbol{b}+m\boldsymbol{c}=\boldsymbol{o}$ とすると

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\\ell\\m\end{pmatrix}=\boldsymbol{o}$$

であるから係数行列に対して行に関する基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

対応する連立１次方程式は

$$\begin{cases}k\qquad +2m&=0\\\qquad \ell\ -\ m&=0\end{cases}$$

である。ここで $m=t$ とすると $k=-2t, \ell=t$ より一般解は

$$\begin{pmatrix} k \\ \ell \\ m \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

である。これより $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (または $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ または $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$) である。

(別解)　1次従属であることの別解を与える。行列 A の階数を考えると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank} A = 2$ となり，ベクトルの個数より小なので1次従属である。

問題 4.2.6．$\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

に対して，$\mathbf{R}^4 = W \oplus W'$ となる W' を求めよ.

(解答例)

部分空間 W の生成するベクトルに W' の2つのベクトル合わせた4つのベクトルが1次独立であればよい。部分空間 W の生成するベクトルを並べた $(4,2)$ 行列に対して行に関する基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから例えば

$$W' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

とすると $\mathbf{R}^4 = W \oplus W'$ となる。

問題 4.2.7． $\mathbf{R}^4$ において，W_1, W_2 を次のように定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \; x + 2y + 3z + w = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \; x + 2y + 3z + w = 0,\ 3y + z + w = 0 \right\}$$

このとき，$\dim W_1,\ \dim W_2,\ \dim(W_1 \cap W_2),\ \dim(W_1 + W_2)$ を求めよ．

(解答例)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_1$ とすると $x + 2y + 3z + w = 0$ より

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-2y-3z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

だから $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ は1次独立である。これより

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

ゆえに $\dim W_1 = 3$ である。

つぎに W_2 の条件

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + w = 0 \\ \quad\ \ 3y + \ \ z + w = 0 \end{cases}$$

より $x = y - 2z,\ w = -3y - z$ であるから $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in W_2$ とすると

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \\ -3y - z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから階数は 2 となり $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である。これより

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ゆえに $\dim W_2 = 2$ である。

つぎに $W_2 \subset W_1$ より $W_1 \cap W_2 = W_2,\ W_1 + W_2 = W_1$ だから

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 2, \qquad \dim(W_1 + W_2) = 3$$

である。

問題 4.2.8. W_1, W_2 を n 次元線形空間 V の部分空間とする．$\dim W_1 = n - 1,\ \dim W_2 = n - 1,\ W_1 \neq W_2$ のとき，

$$\dim(W_1 + W_2) = n, \qquad \dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$$

が成り立つことを示せ.

(解答例)

$\dim W_1 = \dim W_2 = n - 1,\ W_1 \neq W_2$ より

$$\boldsymbol{v} \in W_2, \qquad \boldsymbol{v} \notin W_1$$

である $\boldsymbol{v}$ が存在する。$V \supset W_1 + W_2 \supset W_1 + \langle \boldsymbol{v} \rangle$ であり，$\dim(W_1 \cap \langle \boldsymbol{v} \rangle) = 0$ より

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + \langle \boldsymbol{v} \rangle) &= \dim W_1 + \dim \langle \boldsymbol{v} \rangle - \dim(W_1 \cap \langle \boldsymbol{v} \rangle) \\ &= (n-1) + 1 = n.\end{aligned}$$

ゆえに $\dim(W_1 + \langle \boldsymbol{v} \rangle) = n$ である。また $\dim V = n$ より $\dim(W_1 + W_2) = n$ が得られる。これより

$$\begin{aligned}\dim(W_1 \cap W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) \\ &= (n-1) + (n-1) - n = n - 2\end{aligned}$$

となり $\dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$ が得られる。

問題 4.3.1． V を 4 次元線形空間とし，その基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ とする．この基底から基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}u_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4\}$ への基底の変換行列を求めよ.

(解答例)

$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$ とすると

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，求める基底の変換行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 4.3.2． $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を 1 次独立なベクトルとし，A, B を n 次正方行列とする．このとき $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)B$ ならば $A = B$ であることを示せ.

(解答例)

行列 A, B の第 j 列をそれぞれ $\boldsymbol{a}_j$, $\boldsymbol{b}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とすると $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)B$ より

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{b}_j.$$

すなわち，斉次連立 1 次方程式

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)(\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b}_j) = \mathbf{o}$$

が得られる。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立であるから $\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) \neq 0$ である。これより $\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b}_j = \mathbf{o}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ となり $A = B$ が分かる。

問題 4.3.3． A を n 次正則行列，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を１次独立なベクトルとする。$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)A$ ならば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立であることを示せ.

(解答例)

$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ とすると $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ となる。ここで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は１次独立であるから $\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ である。これより $A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ となる。さらに A は正則行列であるから $\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ である。ゆえに $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立である。

問題 4.3.4． A を (m, n) 行列，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を１次独立なベクトルとし，$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)A$ とする．このとき次を示せ.

(1) $\operatorname{rank} A = n$ ならば $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立である.

(2) $\operatorname{rank} A < n$ ならば $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次従属である.

(解答例)

$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ とすると $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ となる。ここで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は１次独立であるから $A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ となる。

(1) $\operatorname{rank} A = n$ のとき，斉次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ は自明な解のみに限るから $\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$．ゆえに $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立である。(系 2.9 参照)

(2) $\operatorname{rank} A < n$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{o}$ は自明な解以外の解をもつから $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次従属である。

問題 4.3.8. $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを示し，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ への基底の変換行列を求めよ．また，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ への基底の変換行列を求めよ．

(解答例)

行列式

$$\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

より $\det(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \neq 0$ だから $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は１次独立である。

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{u}_3$$

より

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

これより

$$\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{e}_3 = -2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3$$

である。これを用いると任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3 \\ &= x(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3) + y(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3) + z(-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3) \\ &= (2x + y - 2z)\boldsymbol{u}_1 + (-x + z)\boldsymbol{u}_2 + (-x - y + 2z)\boldsymbol{u}_3\end{aligned}$$

となる。以上から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である。

同様にして，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底であることを確かめる。

$$\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

より $\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) \neq 0$ だから $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3$ は１次独立である。

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$$

より

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

より

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

これより

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3), \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3)$$

である。これを用いると任意の $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ は

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(-x - y + 3z)\boldsymbol{v}_1 + (y - z)\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{2}(x + y - z)\boldsymbol{v}_3$$

となる。以上から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底である。

つぎに

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3) + (-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3) = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3, \\
\boldsymbol{v}_2 &= -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = -(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3) + (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3) = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \\
\boldsymbol{v}_3 &= 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 = 2(2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3) + (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3) + (-2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3) \\
&= 3\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3
\end{aligned}$$

だから基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ への基底の変換行列を P とすると $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)P$ より

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。また $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ から $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ への基底の変換行列は P^{-1} だから

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \\
\to &\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

より

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

(別解)　$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ および $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ が１次独立であることは次のようにして階数からも確かめられる。

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = 3$ となる。これより $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ は１次独立である。同様にして

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = 3$ となる。これより $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は１次独立である。

問題 4.4.2． ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ において，次が成り立つことを示せ．

(1) A を n 次実正方行列とすると，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\, {}^tA\boldsymbol{y}), \qquad (\boldsymbol{x},\, A\boldsymbol{y}) = ({}^tA\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y})$$

である．ここで (,) は標準内積とする．

(2) 任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y},\, \boldsymbol{z})$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である．

(解答例)

(1) 標準内積の定義から

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = ({}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA)\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}),$$
$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\Big({}^t({}^tA)\boldsymbol{y}\Big) = \Big({}^t\boldsymbol{x}\,{}^t({}^tA)\Big)\boldsymbol{y} = {}^t({}^tA\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = ({}^tA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

ゆえに問題の等式が示された。

(2) 題意の等式において $\boldsymbol{z}$ は任意であるから，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とすると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = x_i$ (ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分) であるから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ より $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となる。よって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である。

問題 4.4.3. 次の等式を証明せよ.

(1) $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2+||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2=2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2)$

(2) $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2-||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||^2=4(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y})$

(解答例)

(1) 内積の定義から

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &\quad +\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\}\\ &= 2\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\}\\ &= 2(||\boldsymbol{x}||^2+||\boldsymbol{y}||^2).\end{aligned}$$

(2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\ &\quad -\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\}\\ &= 4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

問題 4.4.4. ユークリッド空間において，$||\boldsymbol{u}||=1$ とする．ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{u}$ **方向成分ベクトル**という．このとき，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}$ と直交することを示せ.

(解答例)

ベクトル $\boldsymbol{u}$ は単位ベクトルであるから $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=1$ より

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\Big(\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\Big)=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})-(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\}=0$$

であるから $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する。

問題 4.4.8. $\mathbf{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して, $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ となる正規直交系 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を求めよ.

(解答例)

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次独立であることを確かめる。

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = 3$ である。これより $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立である。グラム・シュミットの直交化法より順次ベクトルを構成する。

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{||\,\boldsymbol{a}_1\,||} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2'}{||\,\boldsymbol{b}_2'\,||} = \frac{1}{2\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_3' &= \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{b}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{13}{2\sqrt{19}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 27 \\ -2 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{b}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3'}{||\,\boldsymbol{b}_3'\,||} = \frac{1}{\sqrt{1634}}\begin{pmatrix} 27 \\ -2 \\ 1 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

このように構成された $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \rangle$ となる正規直交系である。

問題 4.4.9． V を実内積空間とする．このとき次を示せ．

(1) W の直交補空間 $W^\perp$ は V の部分空間であることを示せ．

(2) V の部分空間 W_1, W_2 に対して，$W_1 \supset W_2$ ならば $W_1^\perp \subset W_2^\perp$ であることを示せ．

(解答例)

(1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W^\perp$ とすると任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) = 0,\ (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = 0$ である。任意の実数 k, ℓ に対して

$$(k\,\boldsymbol{x} + \ell\,\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = k\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) + \ell\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}) = 0$$

だから $k\,\boldsymbol{x} + \ell\,\boldsymbol{y} \in W^\perp$ となる。これより $W^\perp$ は V の部分空間である。

(2) $W_2 \subset W_1$ より，$\boldsymbol{x} \in W_2$ ならば $\boldsymbol{x} \in W_1$ である。対偶を考えると，$\boldsymbol{x} \notin W_1$ ならば $\boldsymbol{x} \notin W_2$ となる。すなわち，$\boldsymbol{x} \in W_1^\perp$ ならば $\boldsymbol{x} \in W_2^\perp$ となり，$W_1^\perp \subset W_2^\perp$ が得られる。

問題 4.4.11． $\mathbf{R}^3$ の部分空間 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ の直交補空間とその正規直交基底を 1 組求めよ．

(解答例)

部分空間 W の生成するベクトルを $\boldsymbol{a}$ とし，これに直交する $\mathbf{R}^3$ の 1 次独立なベクトルを 2 つ求める。求めるベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ とすると，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ より

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$$

である。$x + y + z = 0$ の一般解は $y = -s,\ z = -t$ とすると $x = s + t$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数}).$$

これより

$$W^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となる。また，グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を構成する。$W^\perp$ を生成するベクトルを順に $\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$ とすると

$$\boldsymbol{c}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{||\,\boldsymbol{b}_1\,||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_2' = \boldsymbol{b}_2 - (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_2 = \frac{\boldsymbol{c}_2'}{||\,\boldsymbol{c}_2'\,||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

これより

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

は直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底の 1 つである。

問題 4.4.12．

$$(\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．$\mathbf{R}^2$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2\}$ への基底の変換行列を求めよ．また，$\{\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\}$ への基底の変換行列を求めよ．

(解答例)

$\{\boldsymbol{a}_1,\,\boldsymbol{a}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1,\,\boldsymbol{b}_2\}$ への基底の変換行列を A とすると $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)A$ であり，

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

より

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)^{-1}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ である。

また

$${}^tAA = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = E$$

より $A^{-1} = {}^tA$. これより $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ への基底の変換行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 4.4.13. A を n 次直交行列とし，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底とする．このとき

$$\{A\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2, \ldots, A\boldsymbol{u}_n\}$$

は正規直交基底であることを示せ.

(解答例)

A は直交行列であるから ${}^tAA = E$ であり，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底であるから $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ である。これより

$$(A\boldsymbol{u}_i, A\boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{u}_i, {}^tAA\boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}.$$

これより $\{A\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2, \ldots, A\boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底である。

問題 4.4.15. A, B を複素行列とするとき，次を示せ.

(1) $(A^*)^* = A$

(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$

(3) $(a\,A)^* = \overline{a}\,A^* \qquad (a \in \mathbf{C})$

(4) $(AB)^* = B^*A^*$

(5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(解答例)

(1) $(A^*)^* = {}^t(\overline{{}^t\overline{A}}) = \overline{{}^t({}^t\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A.$

(2) $(A+B)^* = {}^t(\overline{A+B}) = {}^t(\overline{A} + \overline{B}) = {}^t\overline{A} + {}^t\overline{B} = A^* + B^*.$

(3) $(a\,A)^* = {}^t(\overline{a\,A}) = {}^t(\bar{a}\,\overline{A}) = \bar{a}\,{}^t\overline{A} = \bar{a}\,A^*.$

(4) $(AB)^* = {}^t(\overline{AB}) = {}^t(\overline{A}\,\overline{B}) = {}^t\overline{B}\,{}^t\overline{A} = B^*A^*.$

(5) $(A^{-1})^* = {}^t(\overline{A^{-1}}) = {}^t(\overline{A}^{-1}) = ({}^t\overline{A})^{-1} = (A^*)^{-1}.$

問題 4.4.16． A がユニタリ行列ならば，行列式 $|A|$ の絶対値は 1 であることを示せ.

(解答例)

A をユニタリ行列とすると $A^*A = E$ だから

$$1 = |E| = |A^*A| = |A^*| \cdot |A| = |{}^t\overline{A}| \cdot |A| = \overline{|A|} \cdot |A| = |A|^2.$$

これより $|A| = \pm 1$ である。ゆえに行列式 $|A|$ の絶対値は 1 である。

問題 4.4.17． A をエルミート行列とするとき，次を示せ.

(1) A の対角成分は実数である.

(2) A の行列式は実数である.

(解答例)

(1) $A = (a_{ij})$ をエルミート行列とすると $A^* = A$ より ${}^t\overline{a_{ij}} = a_{ij}$ だから，$\overline{a_{ii}} = a_{ii}$ である。これよりエルミート行列の対角成分は実数である。

(2) $|A| = |A^*| = |{}^t\overline{A}| = \overline{|A|}$ より，エルミート行列の行列式は実数である。

問題 4.5.1． $\mathbf{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x + y + z = 0 \right\}$ とする.

(1) 方程式 $x + y + z = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とするとき，$W = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ であることを示せ.

(解答例)

(1) $y = -s,\ z = -t$ とすると $x = s + t$ だから一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

(2) (1) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ -t \end{pmatrix} = (2s+t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (2s+t)\, \boldsymbol{a} - s\, \boldsymbol{b}$$

である。これより $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は 1 次独立であるから $W = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ である。

問題 4.5.2. $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x+2y=0 \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; 2x+3y=0 \right\}$ とするとき，$V_1 \oplus V_2 = \mathbf{R}^2$ を示せ.

(解答例)

$\mathbf{R}^2$, V_1, V_2 の任意のベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \end{pmatrix} \in V_2$ とおき

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s+3t \\ s-2t \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} -2s+3t = x & \cdots ① \\ s-2t = y & \cdots ② \end{cases}$$

である。ここで ① $\times 2 +$ ② $\times 3$ より $s = -2x-3y$ となり，① $+$ ② $\times 2$ より $t = -x-2y$ となる。これより

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 4x+6y \\ -2x-3y \end{pmatrix} \in V_1, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3x-6y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \in V_2$$

とすると $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V_1 + V_2$ だから

$$\mathbf{R}^2 = V_1 + V_2$$

である。また，$\begin{pmatrix} 4x+6y \\ -2x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x-6y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$ より $x=0$, $y=0$ であるから $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{o}\}$ である。これより

$$\mathbf{R}^2 = V_1 \oplus V_2$$

である。

問題 4.5.3.

(1) $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は１次独立であることを示し，

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の１次結合として表せ．($\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ に関する成分表示を求めよ．)

(2) $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が１次独立であることを示し，

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の１次結合で表せ．($\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ による成分表示を求めよ．)

(解答例)

(1) 行列 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ の行列式は

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \neq 0$ より $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立である。また $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ より

$$\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$

である。これより

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= a\,\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2 + c\,\boldsymbol{e}_3 \\ &= a(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3) + b\,\boldsymbol{a}_1 + c(-\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \\ &= (-a + b - c)\boldsymbol{a}_1 - c\,\boldsymbol{a}_2 + (a + c)\boldsymbol{a}_3. \end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{x} = -(a - b + c)\boldsymbol{a}_1 - c\,\boldsymbol{a}_2 + (a + c)\boldsymbol{a}_3$ である。

(１次独立部分の別解)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次独立であることは次のように階数からも確かめられる。

$$(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これより $\operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3) = 3$ であり，与えられたベクトルの個数に等しいから $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は１次独立である。

(2) 行列 $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ の行列式は

$$\det(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$\det(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \neq 0$ より $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ は１次独立である。また $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ より

$$\boldsymbol{e}_1 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2, \qquad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$$

である。これより

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= a\,\boldsymbol{e}_1 + b\,\boldsymbol{e}_2 + c\,\boldsymbol{e}_3 \\ &= a(2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{b}_3) + b(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) + c(-\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3) \\ &= (2a + b - c)\boldsymbol{b}_1 + (-a - b + c)\boldsymbol{b}_2 + (-a + c)\boldsymbol{b}_3. \end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{x} = (2a + b - c)\boldsymbol{b}_1 - (a + b - c)\boldsymbol{b}_2 - (a - c)\boldsymbol{b}_3$ である。

(１次独立部分の別解)　$\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ が１次独立であることは次のように階数からも確かめられる。

$$(\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これより $\operatorname{rank}(\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3) = 3$ であり，与えられたベクトルの個数に等しいから $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ は１次独立である。

問題 4.5.4. 次のベクトルは１次独立かどうか判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) ３つのベクトルを並べた行列の行列式を考えると

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -17 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 17$$

であるから１次独立である。

(別解) ３つのベクトルを並べた行列の階数を考えると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

より階数は 3 であり，与えられたベクトルの個数に等しいから１次独立である。

(2) 3 次の列ベクトルが４つあるので１次従属である。

(別解) ４つのベクトルを並べた行列の階数を考えると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

より階数は 3 であり，与えられたベクトルの個数は 4 だから１次従属である。

(3) ３つのベクトルを並べた行列の階数を考えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より階数は 3 であり，与えられたベクトルの個数に等しいから１次独立である。

問題 4.5.5． $\mathbf{R}^2$ において $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくとき，次の問いに答えよ.

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底であることを示せ.

(2) 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ への基底の変換行列 A を求めよ.

(3) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ への基底の変換行列 B を求めよ.

(4) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ から $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ への基底の変換行列 C を求めよ.

(解答例)

(1) 行列 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ の行列式は

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad \det(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

であり，0 でないから $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は１次独立である。$\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ と表せるから

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2),$$
$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)$$

となる。これより $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ は

$$\boldsymbol{x} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 = \frac{x}{3}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2) + \frac{y}{3}(\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{3}(x+y)\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{3}(-x+2y)\boldsymbol{a}_2,$$
$$\boldsymbol{x} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 = \frac{x}{4}(\boldsymbol{b}_1 + 3\boldsymbol{b}_2) + \frac{y}{4}(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2) = \frac{1}{4}(x+y)\boldsymbol{b}_1 + \frac{1}{4}(3x-y)\boldsymbol{b}_2$$

と表せるから $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底である。

(2) $\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ より

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから求める基底の変換行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(3) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$ より

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

だから求める基底の変換行列 B は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

(4) (2) より

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。(3) より $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) B = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) A^{-1} B$ だから

$$C = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

ゆえに $C = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ である。

問題 4.6.1. V を線形空間，W_1, W_2 を V の部分空間とするとき $W_1 \cup W_2$ は一般に V の部分空間にならないが，$W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であるならば，$W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ となることを示せ.

(解答例)

$W_1 \cup W_2$ は V の部分空間とし，$\boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_1 \notin W_2,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2,\ \boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ となる $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ が存在すると仮定する。$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1 \cup W_2$ である。$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_1$ のとき，$W_1 \ni (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ となり仮定に矛盾する。同様に $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W_2$ のとき，$W_2 \ni (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ となり，この場合も仮定に矛盾する。背理法により，$\boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_1 \notin W_2,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2,\ \boldsymbol{v}_2 \notin W_1$ となる $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ は存在しない。これより，$\boldsymbol{v}_1 \in W_1$ ならば $\boldsymbol{v}_1 \in W_2$，または $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ ならば $\boldsymbol{v}_2 \in W_1$ である。ゆえに $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間ならば $W_1 \subset W_2$ または $W_2 \subset W_1$ である。

問題 4.6.2． n 次正方行列全体のつくる n^2 次元線形空間の部分空間で次の行列全体からなるものの基底と次元を求めよ．

(1) 対角行列

(2) 上三角行列

(3) 対称行列

(4) 交代行列

(解答例)

実数を成分にもつ n 次正方行列の全体を

$$M(n;\mathbf{R}) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbf{R},\ 1 \leq i,\ j \leq n\}$$

とし，$\boldsymbol{e}_{ij}$ を行列単位とする。

(1) 対角行列の全体を

$$D(n;\mathbf{R}) = \{A = (a_{ii}) \in M(n;\mathbf{R}) \mid a_{ii} \in \mathbf{R},\ 1 \leq i \leq n\}$$

とすると，任意の $A \in D(n;\mathbf{R})$ は

$$\begin{aligned} A = (a_{ii}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}\,\boldsymbol{e}_{11} + a_{22}\,\boldsymbol{e}_{22} + \cdots + a_{nn}\,\boldsymbol{e}_{nn} \end{aligned}$$

と表せるから $D(n;\mathbf{R})$ の基底は $\{\boldsymbol{e}_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ である。これより $\dim D(n;\mathbf{R}) = n$ である。

(2) 上三角行列の全体を

$$F(n;\mathbf{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbf{R}) \mid a_{ij} = 0\ (i > j)\}$$

とすると，任意の $A \in F(n;\mathbf{R})$ は

$$\begin{aligned} A \ = \ (a_{ij}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \ a_{11}\,\boldsymbol{e}_{11} + a_{12}\,\boldsymbol{e}_{12} + a_{13}\,\boldsymbol{e}_{13} + \cdots + a_{1n}\,\boldsymbol{e}_{1n} \\ &\qquad\qquad + a_{22}\,\boldsymbol{e}_{22} + a_{23}\,\boldsymbol{e}_{23} + \cdots + a_{2n}\,\boldsymbol{e}_{2n} \\ &\qquad\qquad\qquad \ddots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a_{nn}\,\boldsymbol{e}_{nn} \end{aligned}$$

と表せるから $F(n;\mathbf{R})$ の基底は $\{\boldsymbol{e}_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ である。また次元は

$$\dim F(n;\mathbf{R}) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}\,n(n+1)$$

より $\dim F(n;\mathbf{R}) = \dfrac{1}{2}\,n(n+1)$ である。

(3) 対称行列の全体を

$$G(n;\mathbf{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbf{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\ (1 \leq i,\, j \leq n)\}$$

とすると，任意の $A \in G(n;\mathbf{R})$ は

$$\begin{aligned}
A \;=\; (a_{ij}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \frac{a_{11}}{2}\,(2\boldsymbol{e}_{11}) + a_{12}(\boldsymbol{e}_{12}+\boldsymbol{e}_{21}) + a_{13}(\boldsymbol{e}_{13}+\boldsymbol{e}_{31}) + \cdots + a_{1n}(\boldsymbol{e}_{1n}+\boldsymbol{e}_{n1}) \\
&\qquad + \frac{a_{22}}{2}\,(2\boldsymbol{e}_{22}) \qquad + a_{23}(\boldsymbol{e}_{23}+\boldsymbol{e}_{32}) + \cdots + a_{2n}(\boldsymbol{e}_{2n}+\boldsymbol{e}_{n2}) \\
&\qquad\qquad \ddots \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{a_{nn}}{2}\,(2\boldsymbol{e}_{nn})
\end{aligned}$$

と表せるから $G(n;\mathbf{R})$ の基底は $\{\boldsymbol{e}_{ij}+\boldsymbol{e}_{ji} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ である。また次元は

$$\dim G(n;\mathbf{R}) = 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}\,n(n+1)$$

より $\dim G(n;\mathbf{R}) = \dfrac{1}{2}\,n(n+1)$ である。

(4) 交代行列の全体を

$$H(n;\mathbf{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M(n;\mathbf{R}) \mid a_{ii} = 0,\ a_{ij} = -a_{ji}\ (1 \leq i,\, j \leq n)\}$$

とすると，任意の $A \in H(n;\mathbf{R})$ は

$$\begin{aligned}
A \;=\; (a_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= a_{12}(\boldsymbol{e}_{12}-\boldsymbol{e}_{21}) + a_{13}(\boldsymbol{e}_{13}-\boldsymbol{e}_{31}) + \cdots + a_{1n}(\boldsymbol{e}_{1n}-\boldsymbol{e}_{n1}) \\
&\qquad + a_{23}(\boldsymbol{e}_{23}-\boldsymbol{e}_{32}) + \cdots + a_{2n}(\boldsymbol{e}_{2n}-\boldsymbol{e}_{n2}) \\
&\qquad\qquad \ddots \\
&\qquad\qquad\qquad + a_{n-1n}(\boldsymbol{e}_{n-1n}-\boldsymbol{e}_{nn-1})
\end{aligned}$$

と表せるから $H(n;\mathbf{R})$ の基底は $\{\boldsymbol{e}_{ij}-\boldsymbol{e}_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ である。また次元は

$$\dim G(n;\mathbf{R}) = 1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}\,n(n-1)$$

より $\dim G(n;\mathbf{R}) = \dfrac{1}{2}\,n(n-1)$ である。

問題 4.6.3. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を１次独立なベクトルとする．$\alpha\,\boldsymbol{u}+\beta\,\boldsymbol{v},\ \alpha'\,\boldsymbol{u}+\beta'\,\boldsymbol{v}$ が１次独立であるための必要十分条件は $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ であることを示せ.

(解答例)

$c_1(\alpha\,\boldsymbol{u}+\beta\,\boldsymbol{v})+c_2(\alpha'\,\boldsymbol{u}+\beta'\,\boldsymbol{v})=\boldsymbol{o}$ とすると，$(\alpha\,c_1+\alpha' c_2)\boldsymbol{u}+(\beta\,c_1+\beta' c_2)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ である。$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は１次独立であるから

$$\begin{cases} \alpha\,c_1+\alpha' c_2=0 \\ \beta\,c_1+\beta' c_2=0 \end{cases}$$

が成り立つ。$\alpha\,\boldsymbol{u}+\beta\,\boldsymbol{v}, \alpha'\,\boldsymbol{u}+\beta'\,\boldsymbol{v}$ が１次独立であるための必要十分条件は，この斉次連立１次方程式が自明な解のみをもつことである。これより

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}\neq 0$$

だから $\alpha\beta'-\beta\alpha'\neq 0$ である。

問題 4.6.4. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立なベクトルとする.

(1) $\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{u}_n$ は１次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_n$ は１次独立であることを示せ.

(解答例)

(1) $c_1(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)+c_2(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3)+\cdots+c_{n-1}(\boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{u}_n)=\boldsymbol{o}$ とすると

$$c_1\,\boldsymbol{u}_1+(-c_1+c_2)\boldsymbol{u}_2+(-c_2+c_3)\boldsymbol{u}_3+\cdots+(-c_{n-2}+c_{n-1})\boldsymbol{u}_{n-1}-c_{n-1}\,\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{o}$$

である。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立であるから,

$$c_1=0,\quad -c_1+c_2=0,\quad -c_2+c_3=0,\ldots,-c_{n-2}+c_{n-1}=0,\quad c_{n-1}=0$$

である。これより $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$ となるから，$\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}-\boldsymbol{u}_n$ は１次独立である。

(2) $c_1(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)+c_2(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3)+\cdots+c_{n-1}(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_n)=\boldsymbol{o}$ とすると

$$(c_1+c_2+\cdots+c_{n-1})\boldsymbol{u}_1+c_1\,\boldsymbol{u}_2+c_2\,\boldsymbol{u}_3+\cdots+c_{n-1}\,\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{o}$$

である。$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は１次独立であるから，$c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}=0, c_1=0, c_2=0, \ldots, c_{n-1}=0$ である。これより $c_1=c_2=\cdots=c_{n-1}=0$ となるから，$\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_n$ は１次独立である。

問題 5.1.3． 例 5.1.2 (3) の写像は線形写像であることを示せ.

(解答例)

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) + f_A(\boldsymbol{y}).$$

任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，$r \in \mathbf{R}$ に対して

$$f_A(r\,\boldsymbol{x}) = A(r\,\boldsymbol{x}) = r(A\boldsymbol{x}) = r\,f_A(\boldsymbol{x}).$$

これより線形写像である。

問題 5.1.4． 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ について，次が成り立つことを示せ.

(1) $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$

(2) $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$

(解答例)

(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ において $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \mathbf{o}$ とすると，$\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ より

$$f(\mathbf{o}) = f(\mathbf{o}+\mathbf{o}) = f(\mathbf{o}) + f(\mathbf{o}).$$

これより $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ が得られる。

(2) $f(r\,\boldsymbol{x}) = r\,f(\boldsymbol{x})$ において $r = -1$ とすると，$(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ より $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$ が得られる。

問題 5.1.6． n 次元実線形空間 V は $\mathbf{R}^n$ と同型であることを示せ.

(解答例)

n 次元実線形空間 V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ とし，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする。このとき，$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である線形写像 $f : V \to \mathbf{R}^n$ を考えると，f は同型写像になる。これより V と $\mathbf{R}^n$ は同型である。

問題 5.1.8． $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

で定義された線形写像とする．この写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ と核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底と次元をそれぞれ求めよ．

(解答例)

$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$ であるから，$\mathrm{Ker}\, f$ は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

の解集合である。これは $x + y + 2z = 0$ であるから，$y = -s$, $z = -t$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

と表せる。これより

$$\mathrm{Ker}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となり，$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の基底になる。$\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$ である。

次に $\mathrm{Im}\, f$ の基底と次元を求める。

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, f &= \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid x,\, y,\, z \in \mathbf{R} \right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

である。$\mathrm{Im}\, f$ を生成する上の 3 つのベクトルから 1 次独立なベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を選ぶことができるから

$$\mathrm{Im}\, f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底になる。$\dim \mathrm{Im}\, f = 1$ である。

問題 5.3.1． 上の定理を証明せよ.

(解答例)

線形写像 f の表現行列を A とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ とすると

$$
\begin{aligned}
f\text{：エルミート変換} &\iff (f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})) \\
&\iff (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) \\
&\iff A\text{：エルミート行列} \qquad \text{(定理 4.23 参照)}
\end{aligned}
$$

より定理の 2 つの条件は同値になる。

問題 5.4.1．

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ で定義される線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は x 軸に関する対称移動である．この線形変換の標準基底による表現行列を求めよ.

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ で定義される線形写像 $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ は原点 O に関する対称移動である．この線形写像の標準基底による表現行列を求めよ.

(解答例)

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = x\,\boldsymbol{e}_1 - y\,\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ より，

線形写像 f の標準基底に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = -x\,\boldsymbol{e}_1 - y\,\boldsymbol{e}_2 = (-\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

より，線形写像 f の標準基底に関する表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

問題 5.4.2. 次の写像は線形写像となるかを調べよ.

(1) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2,\quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より f は線形写像である。

(2) スカラー倍を考える。例えば

$$f\left(2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり $2f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2 \end{pmatrix}$ に等しくない。これより f は線形写像でない。

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より f は線形写像である。

(4) スカラー倍を考える。例えば

$$f\left(3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9xy \\ 3x+3y \end{pmatrix}$$

となり $3f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3xy \\ 3x+3y \end{pmatrix}$ に等しくない。これより f は線形写像でない。

問題 5.4.3． 線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ を

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & - & 3y \\ -2x & + & 3y \end{pmatrix}$$

で与えるとき

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の f による像を求めよ.

(解答例)

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

問題 5.4.4． 線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ が

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたすとき, f の標準基底に関する表現行列を求めよ.

(解答例)

$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f(2\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = 2\,f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2),\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2)$ より $2\,f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 3\,\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = 2\,\boldsymbol{e}_1$ だから

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$$

となる。これより

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となり, f の標準基底に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

問題 5.5.1. $\mathbf{R}^3$ において原点と $(1, 1, 1)$ を通る直線のまわりに 90° 回転する線形変換 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ の標準基底に関する表現行列を求めよ.

(解答例)

原点と点 $(1,1,1)$ を通る直線上のベクトルは，この直線のまわりに 90° 回転しての変わらない。この直線上の単位ベクトルとして

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をとると，$f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$ である。

題意の直線に垂直で，原点を通る平面の方程式は $x + y + z = 0$ である。この平面上において原点を中心に 90° 回転する行列を考える。$x + y + z = 0$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

である。ここから２つの特殊解で，１次独立な次の単位ベクトル

$$\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

をとると，$\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ は互いに直交していることが分かる。これより $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1$，$f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_3$，$f(\boldsymbol{a}_3) = -\boldsymbol{a}_2$ は題意を満たす線形写像になる。

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3), \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2), \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3)$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}}\{f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3)\} &= \boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3), \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\{f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2)\} &= \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3), \\
\frac{1}{\sqrt{6}}\{f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) - 2f(\boldsymbol{e}_3)\} &= -\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)
\end{aligned}$$

となる。これより

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3))\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

とすると ${}^tPP = E$ を満たすから P は直交行列である。これより $P^{-1} = {}^tP$ だから

$$
\begin{aligned}
(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) &= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \\
&= (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

これより f の標準基底に関する表現行列 A は

$$
A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}
$$

である。また ${}^tA = A^{-1}$ は逆方向の回転である。

問題 5.5.2. n 次の正方行列 A について，$A^m = O$ ならば $E - A$ は正則行列であり，$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ であることを確かめよ.

(解答例)

$A^m = O$ のとき

$$
(E-A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E - A^m = E
$$

より $E - A$ は正則行列であり，$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$ となる。

問題 5.5.3. 線形写像 $f : U \to V,\ g : V \to U$ に対して $g \circ f = 1_U$ が成り立つとする．ただし $1_U : U \to U$ は U の恒等写像とする．このとき $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$ であることを示せ.

(解答例)

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$f \circ g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$ であり，$g \circ f = 1_U$ だから

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{v} - f \circ g(\boldsymbol{v})) &= g(\boldsymbol{v}) - g(f(g(\boldsymbol{v}))) \\
&= g(\boldsymbol{v}) - g \circ f(g(\boldsymbol{v})) \\
&= g(\boldsymbol{v}) - g(\boldsymbol{v}) \\
&= \mathbf{o}
\end{aligned}
$$

となり，$\boldsymbol{v} - f \circ g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} g$ である。これより $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ であるから $V = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g$ である。

また，任意の $\boldsymbol{u} \in U$ に対して $f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g$ とすると，$g \circ f = 1_U$，$f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Ker} g$ より $\boldsymbol{u} = g \circ f(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u})) = \mathbf{o}$ となるから，$\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g = \{\mathbf{o}\}$ である。

ゆえに $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$ である。

問題 5.5.4. 次の命題が成立することを示せ.

(1) $f : V \to W$ は線形写像で U は V の部分空間とする．$\operatorname{Im} f = f(U)$ ならば $V = U + \operatorname{Ker} f$ である.

(2) $f : V \to V$ を線形変換とするとき，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(f(\boldsymbol{v})) = \mathbf{o}$ となることと，$f(V) \subset \operatorname{Ker} f$ とは同値である.

(解答例)

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$\operatorname{Im} f = f(U)$ より

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) \in \operatorname{Im} f$$

となる $\boldsymbol{u} \in U$ が存在する。このとき

$$f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{o}$$

より $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f$．すなわち，$\boldsymbol{v} \in U + \operatorname{Ker} f$ である。ゆえに $V = U + \operatorname{Ker} f$ となる。

(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) \in V$ であり，$f(f(\boldsymbol{v})) = \mathbf{o}$ より $f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f$ である。ゆえに $V \subset \operatorname{Ker} f$ である。逆に，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) \in f(V) \subset \operatorname{Ker} f$ より $f(f(\boldsymbol{v})) = \mathbf{o}$ となる。

問題 6.1.2． 3 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して

$$\phi_A(t)=t^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\,t^2+\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)t-|A|$$

であることを示せ.

(解答例)

サラスの方法より

$$\begin{aligned}
\phi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & t-a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (t-a_{11})(t-a_{22})(t-a_{33})-a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -(t-a_{11})a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}(t-a_{33})-a_{13}(t-a_{22})a_{31} \\
&= t^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2 \\
&\quad +(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31})t \\
&\quad -(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}) \\
&= t^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2 \\
&\quad +\{(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})\}t-|\,A\,| \\
&= t^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2 \\
&\quad +\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)t-|\,A\,|.
\end{aligned}$$

問題 6.1.4． 次の行列の固有値，固有ベクトルおよび固有空間を求めよ.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$　(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=(\lambda+1)(\lambda-3)$$

であるから A の固有値は

$$\lambda=-1,\quad 3$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。$\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + y = 0$ より

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 3$ の固有ベクトルは $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x - y = 0$ より

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

(2) 行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda-5 & 4 \\ -2 & -4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2(\lambda+3) \\ -2 & -4 & \lambda+5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = (\lambda+3)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+3)^2(\lambda-3)$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -3 \ (\text{重複度 } 2), \quad 3 \ (\text{重複度 } 1)$$

である。$\lambda = -3$ の固有ベクトルは $(-3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + 2y - z = 0$ より $y = -s$, $z = t$ とすると

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

であるから固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(-3) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 3$ の固有ベクトルは $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x - 4y + 8z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

(3) 行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -1, \quad 0, \quad 2$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。$\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。

$$\begin{cases} -x - 2y \qquad\quad = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ \qquad -2y - \ \ z = 0 \end{cases}$$

より $x = -2y = z$ だから，$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$y = 0,\ 2x - 3z = 0$ より $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。

$$\begin{cases} 2x - 2y \qquad\quad = 0 \\ 2x + \ \ y - 3z = 0 \\ \qquad -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

より $x = y = z$ だから，$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

(4) 行列 A の固有多項式は

$$\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 1 & \lambda+3 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ \lambda+1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda+2)
\end{aligned}$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -2\ (\text{重複度 } 1), \quad -1\ (\text{重複度 } 2)$$

である。$\lambda = -2$ の固有ベクトルは $(-2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。

$$\begin{cases} -2x - 2y - z = 0 \\ \quad x + \ \ y + z = 0 \\ -\ x - \ \ y - z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ \ \ x + \ \ y + z = 0 \end{cases}$$

より $x + y = 0$, $z = 0$ だから，$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。

$$\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ \ \ x + 2y + z = 0 \\ -x - \ \ y \qquad = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + \ \ y \qquad = 0 \end{cases}$$

より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

問題 6.1.5. 次の行列の固有値の重複度と固有空間の次元を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答例)

行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = 1 \quad (\text{重複度 } 3)$$

である。$\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$-y-z=0,\ -z=0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有空間は

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，$\dim V(1) = 1$ である。

つぎに行列 B の固有多項式は

$$\phi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = 1 \ \ (\text{重複度 } 3)$$

である。$\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$z = 0$ より

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (s,\, t \text{ は任意定数})$$

である。これより固有空間は

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

であり，$\dim V(1) = 2$ である。

問題 6.2.3． 例題 6.2.2 で与えられた行列 A について A^k を求めよ.

(解答例)

例題 6.2.2 における P の逆行列をもとめる。行列 $(P\,|\,E)$ に対して行に関する基本変形を行うと

$$(P\,|\,E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

より

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

例題 6.2.2 より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

だから

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$$

である。また，$(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$ より

$$\begin{aligned} A^k &= P(P^{-1}AP)^kP^{-1} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 3\cdot 2^k & 0 & -3\cdot 2^k \\ -(-2)^k & 4\cdot(-2)^k & -(-2)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+3\cdot 2^k-(-2)^k & -4+4\cdot(-2)^k & 4-3\cdot 2^k-(-2)^k \\ 2-2\cdot(-2)^k & -2+8\cdot(-2)^k & 2-2\cdot(-2)^k \\ 4-3\cdot 2^k-(-2)^k & -4+4\cdot(-2)^k & 4+3\cdot 2^k-(-2)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$A^k = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4+3\cdot 2^k-(-2)^k & -4+4\cdot(-2)^k & 4-3\cdot 2^k-(-2)^k \\ 2-2\cdot(-2)^k & -2+8\cdot(-2)^k & 2-2\cdot(-2)^k \\ 4-3\cdot 2^k-(-2)^k & -4+4\cdot(-2)^k & 4+3\cdot 2^k-(-2)^k \end{pmatrix}$$

である。

問題 6.2.5. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について，対角化するための正則行列を求め，対角化せよ.

(解答例)

行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

だから A の固有値は $\lambda = 2 \pm \boldsymbol{i}$ である。

$\lambda = 2-\boldsymbol{i}$ のとき，$\big((2-\boldsymbol{i})E - A\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ より $x + y\boldsymbol{i} = 0$ である。これより $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

$\lambda = 2 + \boldsymbol{i}$ のとき，$\big((2+\boldsymbol{i})E - A\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ より $x - y\boldsymbol{i} = 0$ である。これより $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{i} & -1 \\ -\boldsymbol{i} & 1 \end{pmatrix}$ より

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{i} & -1 \\ -\boldsymbol{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & 2+\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$$

となる。

問題 6.3.2． 次の対称行列を直交行列で対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -\lambda-1 & \lambda & 0 \\ -\lambda-1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -1, \quad 0, \quad 2$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda=-1$ の固有ベクトルは $(-E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -2x-y-z=0 \\ -\ \ x-y \qquad =0 \\ -\ \ x \qquad -z=0 \end{cases}$$

より $x=-y=-z$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda=0$ の固有ベクトルは $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x=0,\ y+z=0$ より $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} x-\ \ y-\ \ z=0 \\ -x+2y \qquad =0 \\ -x \qquad +2z=0 \end{cases}$$

より $x=2y=2z$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ は直交系であるから，これらを単位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にして

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= {}^tPAP \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 4 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ -\lambda+2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+2) \end{aligned}$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = 2, \quad 2 \pm \sqrt{2}$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + z = 0,\ y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 2-\sqrt{2}$ の固有ベクトルは $\Big((2-\sqrt{2})E - A\Big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x + \quad y \qquad\quad = 0 \\ \quad x + \sqrt{2}\,y + \quad z = 0 \\ \qquad\qquad y + \sqrt{2}\,z = 0 \end{cases}$$

より $\sqrt{2}\,x = -y = \sqrt{2}\,z$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 2+\sqrt{2}$ の固有ベクトルは $\Big((2+\sqrt{2})E - A\Big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x - \quad y \qquad\quad = 0 \\ \quad x - \sqrt{2}\,y + \quad z = 0 \\ \qquad\qquad y - \sqrt{2}\,z = 0 \end{cases}$$

より $\sqrt{2}\,x = y = \sqrt{2}\,z$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ は直交系であるから，これらを単位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

にして

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= {}^tPAP \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 0 & 2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8-4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8+4\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(3) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -2, \quad 1$$

である。重複度はそれぞれ 1 および 2 である。

固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルは $(-2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

より $x = -y = z$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{q}_1}{||\,\boldsymbol{q}_1\,||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は単位ベクトルである。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x - y + z = 0$ より $y = s$, $z = -t$ とすると

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s,\ t \text{ は任意定数})$$

だから，１次独立な固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。グラム・シュミットの直交化法より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}_2 &= \frac{\boldsymbol{q}_2}{||\,\boldsymbol{q}_2\,||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{p}'_3 &= \boldsymbol{q}_3 - (\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{p}_3 &= \frac{\boldsymbol{p}'_3}{||\,\boldsymbol{p}'_3\,||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

これより $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は直交系であるから

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= {}^tPAP \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ -2\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 6.4.1. A を正規行列とするとき，次を示せ．

(1) $\boldsymbol{z} \in \mathbf{C}^n$ に対して，$||\,A\boldsymbol{z}\,|| = ||\,A^*\boldsymbol{z}\,||$ である．

(2) $A - \lambda\,E$ は正規行列である．

(解答例)

(1) $||\,A\boldsymbol{z}\,||^2 = (A\boldsymbol{z}, A\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, A^*A\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, AA^*\boldsymbol{z}) = (A^*\boldsymbol{z}, A^*\boldsymbol{z}) = ||\,A^*\boldsymbol{z}\,||^2$ より $||\,A\boldsymbol{z}\,|| = ||\,A^*\boldsymbol{z}\,||$ が得られる。

(2) $\lambda \in \mathrm{C}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda\,E)^*(A-\lambda\,E) &= \Big(A^* - (\lambda\,E)^*\Big)(A-\lambda\,E) \\
&= (A^* - \overline{\lambda}\,E)(A-\lambda\,E) \\
&= A^*A - \lambda\,A^* - \overline{\lambda}\,A + |\,\lambda\,|^2E \\
&= AA^* - \lambda\,A^* - \overline{\lambda}\,A + |\,\lambda\,|^2E \\
&= (A-\lambda\,E)A^* - \overline{\lambda}\,(A-\lambda\,E) \\
&= (A-\lambda\,E)(A^* - \overline{\lambda}\,E) \\
&= (A-\lambda\,E)(A-\lambda\,E)^*.
\end{aligned}
$$

これより $A - \lambda\,E$ は正規行列である。

問題 6.4.2. A を正規行列，U をユニタリ行列とする．このとき，$U^{-1}AU$ は正規行列であることを示せ．

(解答例)

U はユニタリ行列だから $U^*U = UU^* = E$ より $U^{-1} = U^*$ である。これより

$$
\begin{aligned}
&(U^{-1}AU)^*(U^{-1}AU) = (U^*AU)^*(U^*AU) = \Big(U^*A^*(U^*)\Big)(U^*AU) \\
&= U^*A^*(UU^*)AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*A(UU^*)A^*U \\
&= (U^*AU)(U^*A^*U) = (U^*AU)(U^*AU)^* = (U^{-1}AU)(U^{-1}AU)^*
\end{aligned}
$$

だから $U^{-1}AU$ は正規行列である。

問題 6.4.3. 行列 A が，ユニタリ行列により対角化可能ならば，$A^*A = AA^*$ が成り立つことを示せ.

(解答例)

行列 A がユニタリ行列 U により対角化可能だから

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は行列 A の固有値である。$U^{-1} = U^*$ より

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

だから

$$\begin{aligned}
A^*A &= \left(U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \right)^* U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \\
&= (U^*)^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^* U^*U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \\
&= U \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \\
&= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} U^* \\
&= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} U^* \\
&= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \left(U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \right)^* \\
&= AA^*.
\end{aligned}$$

これより $A^*A = AA^*$ が成り立つ。

問題 6.4.4. ある自然数 m について，$A^m = O$ となる行列 A を**べき零行列**という．行列 A がべき零行列となるための必要十分条件は A の固有値がすべて 0 であることであることを示せ.

(解答例)

行列 A の 0 でない固有値を λ とし，その固有ベクトルを $\boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{o})$ とする。$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$ だから，任意の自然数 n に対して

$$A^n\boldsymbol{x} = \lambda\,A^{n-1}\boldsymbol{x} = \cdots = \lambda^n\boldsymbol{x}$$

より $A^n\boldsymbol{x} = \lambda^n\boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{o})$ が成り立つ。これより $A^n \neq O$ である。これの対偶を考えると，$A^n = O$ ならば $\lambda = 0$ である。

逆に，固有値がすべて 0 とすると，行列 A は適当なユニタリ行列 U により

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

のように上三角行列になる。このとき，右辺の上三角行列 T の対角成分がすべて 0 であるから，ある自然数 m に対して $T^m = O$ となる。これより

$$A^m = (UTU^{-1})^m = UT^mU^{-1} = O$$

となり，A はべき零行列である。

問題 6.4.5. $f(t)$ を t に関する多項式とする．行列 A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．A の行列多項式 $f(A)$ が正則行列であるための必要十分条件は $f(\lambda_i) \neq 0 \;\; (i = 1, \ldots, n)$ であることを示せ.

(解答例)

フロベニウスの定理より，適当なユニタリ行列 U を用いて

$$U^{-1}f(A)U = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

と表せる。これより行列式を考えると

$$f(\lambda_1)\cdots f(\lambda_n) = \det\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} = \det\Big(U^{-1}f(A)U\Big) = \det f(A).$$

これより，$f(A)$ が正則行列であるための必要十分条件は $f(\lambda_i) \neq 0 \; (i = 1, \ldots, n)$ である。

問題 6.4.6． A は正方行列で，$A^3 + A = O$ をみたすとする．フロベニウスの定理を用いて A の固有値は $0, \boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}$ のうちいずれかであることを示せ．

(解答例)

行列 A の固有値を λ とすると，$A^3 + A = O$ より $\lambda^3 + \lambda = 0$ となるから，$\lambda = 0,\ \pm\boldsymbol{i}$ である。

問題 6.5.1． 次の行列に対して，固有多項式と固有値を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ -8 & -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 2 \\ -2\lambda+2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -\lambda+1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

これより固有多項式は $\phi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$，固有値は $\lambda = 1,\ 3$ である。

(2) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+1).$$

これより固有多項式は $\phi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)$，固有値は $\lambda = 1,\ \pm\boldsymbol{i}$ である。

(3) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 3 & -6 \\ -2 & \lambda & -6 \\ 4 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -\lambda+3 & 0 \\ -2 & \lambda & -6 \\ 4 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & \lambda & -6 \\ 4 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & -6 \\ 4 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

これより固有多項式は $\phi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$，固有値は $\lambda = -1,\ 2,\ 3$ である。

(4) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

これより固有多項式は $\phi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$，固有値は $\lambda = 1,\ 2$ である。

問題 6.5.2. 次の行列に対して，固有値と固有空間を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 6 & -5 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 4 & 2 \\ -6 & \lambda+5 & 2 \\ -3 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & 2 \\ \lambda-1 & \lambda+5 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda+5 & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

これより固有値は $\lambda = -1,\ 1,\ 2$ である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -6x + 4y + 2z = 0 \\ -6x + 4y + 2z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 4x - 3y \phantom{{}-4z} = 0 \\ \phantom{4x-{}} y - 4z = 0 \end{cases}$$

より $z = t$ とすると $x = 3t, y = 4t$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda = -1$ の固有空間は

$$V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -4x + 4y + 2z = 0 \\ -6x + 6y + 2z = 0 \\ -3x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

より $x = y, z = 0$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda = 1$ の固有空間は

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -3x + 4y + 2z = 0 \\ -6x + 7y + 2z = 0 \\ -3x + 3y \phantom{{}+2z} = 0 \end{cases}$$

より $x=y=-2z$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=2$ の固有空間は

$$V(2)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

である。

(2) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-7&-12&0\\2&\lambda+3&0\\-2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7&-12&0\\2&\lambda+3&0\\0&\lambda-1&\lambda-1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-7&-12&0\\2&\lambda+3&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-3&2\lambda-6&0\\2&\lambda+3&0\\0&1&1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&2&0\\2&\lambda+3&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&2&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-1)^2(\lambda-3).\end{aligned}$$

これより固有値は $\lambda=1,\ 3$ である。重複度はそれぞれ 2, 1 である。

固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x+2y=0$ より $y=-s,\ z=t$ とおくと，$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ($s,\ t$ は任意定数) である。これより１次独立な固有ベクトルのとして $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=1$ の固有空間は

$$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルは $(3E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases}-4x-12y&=0\\2x+\ 6y&=0\\-2x-\ 4y+2z&=0\end{cases}$$

より $x=-3y=3z$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=3$ の固有空間は

$$V(3)=\left\langle\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

である。

(3) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda)&=\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-5\\-1&\lambda-2&-3\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-5\\\lambda-3&\lambda-2&-3\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}\\&=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&-5\\1&\lambda-2&-3\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&-5\\0&\lambda-3&2\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}\\&=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&-5\\0&\lambda-2&\lambda+2\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&-5\\0&1&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}\\&=(\lambda-2)(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&1&-5\\0&1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).\end{aligned}$$

これより固有値は $\lambda=1,\ 2,\ 3$ である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda=1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases}-3x+y-5z=0\\-\ x-y-3z=0\\\quad x-y+\ z=0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}x\qquad+2z=0\\\qquad y+\ z=0\end{cases}$$

より $z=-t$ とすると $x=2t,\ y=t$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=1$ の固有空間は

$$V(-1)=\left\langle\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -2x+y-5z=0 \\ -\ x \qquad -3z=0 \\ \quad x-y+2z=0 \end{cases} \qquad \therefore \ \begin{cases} x \qquad +3z=0 \\ \qquad y+\ \ z=0 \end{cases}$$

より $z=-t$ とすると $x=3t,\, y=t$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=2$ の固有空間は

$$V(2)=\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda=3$ の固有ベクトルは $(3E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -x+y-5z=0 \\ -x+y-3z=0 \\ \ \ x-y+3z=0 \end{cases}$$

より $x=y,\, z=0$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda=3$ の固有空間は

$$V(3)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

(4) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 2 \\ -3 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+1 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

これより固有値は $\lambda = 1,\ 2$ である。重複度はそれぞれ 2, 1 である。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ -3x - y - 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

より $z = -t$ とすると $x2t,\, y = -t$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda = 1$ の固有空間は

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ -3x - 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

より $z = -3t$ とすると $x = 2t,\, y = -t$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるから固有値 $\lambda = 2$ の固有空間は

$$V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

問題 6.5.3． 次の行列は実正則行列で対角化できるかどうか調べ，対角化できる場合は対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

これより固有値は $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$ である。重複度はそれぞれ 1 である。固有値がすべて異なるので対角化可能である。

固有値 $\lambda = 1-\sqrt{2}$ の固有ベクトルは $\Big((1-\sqrt{2})E - A\Big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + \sqrt{2}\,y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda = 1+\sqrt{2}$ の固有ベクトルは $\Big((1+\sqrt{2})E - A\Big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x - \sqrt{2}\,y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-4 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

これより固有値は $\lambda = \pm\sqrt{3}$ である。重複度はそれぞれ 1 である。固有値がすべて異なるので対角化可能である。

固有値 $\lambda = -\sqrt{3}$ の固有ベクトルは $(-\sqrt{3}\,E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$(2+\sqrt{3})x + y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda = \sqrt{3}$ の固有ベクトルは $(\sqrt{3}\,E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$(2-\sqrt{3})x + y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & -1 \\ 2+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{3} & 3-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -a & \lambda - b \end{vmatrix} = \lambda\{\lambda - (a+b)\}.$$

これより固有値は $\lambda = 0,\, a+b$ である。

固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルは $-A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$a\,x + b\,y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda = a+b$ の固有ベクトルは $\big((a+b)E - A\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} b\,x - b\,y = 0 \\ -a\,x + a\,y = 0 \end{cases}$$

だから，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

これより，$a + b \neq 0$ で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ の場合

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} b & 1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ -a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また，$a + b = 0$ で $a \neq 0$ または $b \neq 0$ の場合は対角化不可能であり，$a = 0, b = 0$ のときは $A = O$ であるから対角化可能である。

(4) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a & -1 \\ -1 & \lambda - a \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 - 1.$$

これより固有値は $\lambda = \pm\sqrt{1 + a^2}$ である。重複度はそれぞれ 1 である。固有値がすべて異なるので対角化可能である。

固有値 $\lambda = -\sqrt{1 + a^2}$ の固有ベクトルは $(-\sqrt{1 + a^2}\,E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$(a - \sqrt{1 + a^2})x - y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ a - \sqrt{1 + a^2} \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a - \sqrt{1 + a^2} \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda = \sqrt{1 + a^2}$ の固有ベクトルは $(\sqrt{1 + a^2}\,E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$(a + \sqrt{1 + a^2})x - y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ a + \sqrt{1 + a^2} \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a + \sqrt{1 + a^2} \end{pmatrix}$ がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a - \sqrt{1 + a^2} & a + \sqrt{1 + a^2} \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} a+\sqrt{1+a^2} & -1 \\ -a+\sqrt{1+a^2} & 1 \end{pmatrix}$ より

$$
\begin{aligned}
&P^{-1}AP \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} a+\sqrt{1+a^2} & -1 \\ -a+\sqrt{1+a^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a-\sqrt{1+a^2} & a+\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} a+\sqrt{1+a^2} & -1 \\ -a+\sqrt{1+a^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2} & \sqrt{1+a^2} \\ 1+a^2-a\sqrt{1+a^2} & 1+a^2+a\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+\sqrt{1+a^2} & -1 \\ -a+\sqrt{1+a^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -a+\sqrt{1+a^2} & a+\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2\sqrt{1+a^2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{1+a^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1+a^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

問題 6.5.4． 次の行列は対角化できるかどうか調べ，対角化できる場合は対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$
\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ -8 & -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ 2\lambda-2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ -4 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+3 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (\lambda-1)(\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-3).
$$

これより固有値は $\lambda = 1, 3$ である。重複度はそれぞれ 2, 1 である。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 0 \\ -4x - 2y - 2z = 0 \\ -8x - 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

より $2x + y + z = 0$ であるから $y = -2s,\ z = -2t$ とすると，$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ($s,\ t$ は任意定数) である。これより 1 次独立な固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 3$ の固有ベクトルは $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 0 \\ -4x - 2z = 0 \\ -8x - 4y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

より $z = -2t$ とすると，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると

$$(P\,|\,E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

より

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\begin{aligned} \phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\lambda+1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ 2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

これより固有値は $\lambda = -1, 1$ である。重複度はそれぞれ 1, 2 である。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -x + \ \ y - 2z = 0 \\ -x + \ \ y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

より $x = y, z = 0$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は $V(1) = \langle \boldsymbol{p} \rangle$ だから $\dim V(1) = 1$ となり，固有値 $\lambda = 1$ の重複度 2 に等しくない。ゆえに行列 A は対角化不可能である。

(3) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

これより固有値は $\lambda = 1, 2$ である。重複度はそれぞれ 1, 2 である。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから $x = y = -z$ より，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。固有空間は $V(2) = \langle \boldsymbol{p} \rangle$ だから $\dim V(2) = 1$ となり，固有値 $\lambda = 2$ の重複度 2 に等しくない。ゆえに行列 A は対角化不可能である。

(4) 与えられた行列を A とすると固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & -4 \\ 3 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -4 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-1 & -4 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

これより固有値は $\lambda = -1, 1, 2$ である。重複度はそれぞれ 1 である。固有値がすべて異なるから対角化可能である。

固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -3x + \ \ y - 4z = 0 \\ \qquad -2y - 4z = 0 \\ 3x - 3y \qquad = 0 \end{cases}$$

より $x = y = -2z$ であるから $z = -t$ とすると，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。

これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから，$x = y$, $z = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} y - 4z = 0 \\ y - 4z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x \phantom{{}+y} - 3z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - 4z = 0 \end{cases}$$

より $z = t$ とすると，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$(P \,|\, E) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

より

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

問題 6.5.5. 次の行列が直交行列 (${}^tAA = E$) となるように a, b, c を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ -b & 0 & b \\ c & -c & c \end{pmatrix}$$

(解答例) 行列 A は直交行列だから ${}^tAA = E$ であるので

$$E = \begin{pmatrix} a & -b & c \\ 2a & 0 & -c \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2a & a \\ -b & 0 & b \\ c & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & 2a^2-c^2 & a^2-b^2+c^2 \\ 2a^2-c^2 & 4a^2+c^2 & 2a^2-c^2 \\ a^2-b^2+c^2 & 2a^2-c^2 & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} &a^2+b^2+c^2 = 1 && \cdots ① \\ &2a^2-c^2 = 0 && \cdots ② \\ &a^2-b^2+c^2 = 0 && \cdots ③ \\ &4a^2+c^2 = 1 && \cdots ④ \end{aligned}$$

ここで ②+④ より $6a^2 = 1$ となり $a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ となる。また ② および ③ からそれぞれ $c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ および $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ が得られる。ゆえに

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。

問題 6.5.6. 次の対称行列を直交行列で対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(解答例)

(1) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+2)$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -2, \quad 0$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda = -2$ の固有ベクトルは $(-2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x - y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ は直交系であるから，これらを単位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にして

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= {}^tPAP \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(2) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$
\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)^2
\end{aligned}
$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -1, \quad 1$$

である。重複度はそれぞれ 1, 2 である。

固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x+z=0$, $y=0$ だから，$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの 1 つとして

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルは $(E-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x-z=0$ だから $y=t$, $z=s$ とすると $\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (s, t は任意定数) である。これより 1 次独立な固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ は直交系であるから，これらを単位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

にして

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= {}^tPAP \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -\lambda & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda+1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2)
\end{aligned}$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = -1, \quad 0, \quad 2$$

である。重複度はそれぞれ 1 である。

固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルは $(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} -x - y \phantom{{}-z} = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ - y - z = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} x + y \phantom{{}+z} = 0 \\ \phantom{x+{}} y + z = 0 \end{cases}$$

より $z=t$ とすると，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda=0$ の固有ベクトルは $-A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x+z=0,\, y=0$ だから $z=-t$ とすると $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) であるから固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有値 $\lambda=2$ の固有ベクトルは $(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$\begin{cases} 2x-y \qquad\;\, =0 \\ -x+y-\;\; z=0 \\ \qquad -y+2z=0 \end{cases}$$

より $2x=y=2z$ だから，$\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルの１つとして

$$\boldsymbol{q}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。

固有ベクトル $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ は直交系であるから，これらを単位ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

にして

$$P=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= {}^tPAP \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(4) 与えられた行列を A とすると，A の固有多項式は

$$
\begin{aligned}
\phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2(\lambda-3)
\end{aligned}
$$

であるから A の固有値は

$$\lambda = 0, \quad 3$$

である。重複度はそれぞれ 2, 1 である。

固有値 $\lambda = 3$ の固有ベクトルは $(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解であるから

$$
\begin{cases} 2x - \ \ y - \ \ z = 0 \\ \ \ x - 2y + \ \ z = 0 \\ \ \ x + \ \ y - 2z = 0 \end{cases}
$$

より $x = y = z$ だから $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) である。これより固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる。これの単位ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ は

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{q}_1}{||\,\boldsymbol{q}_1\,||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

固有値 $\lambda = 0$ の固有ベクトルは $-A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の自明でない解である。$x + y + z = 0$ だから $y = -t,\, z = -s$ とすると，$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(s,\, t$ は任意定数) である。これより１次独立な固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

がとれる。グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{q}_2}{||\,\boldsymbol{q}_2\,||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_3' = \boldsymbol{q}_3 - (\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{p}_3'}{||\,\boldsymbol{p}_3'\,||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これより

$$P = (\boldsymbol{p}_1,\, \boldsymbol{p}_2,\, \boldsymbol{p}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，P は直交行列だから $P^{-1} = {}^tP$ より

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= {}^tPAP \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

問題 6.6.1． $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ とする．ケーリー・ハミルトンの定理を用いて A^{20} を計算せよ．

(解答例)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$ より $\mathrm{tr}\, A = -1,\ \det A = 1$ だからケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 + A + E = O$$

である。$A - E \neq O$ であり

$$A^3 - E = (A - E)(A^2 + A + E) = O.$$

ゆえに $A^3 = E$ である。これより

$$A^{20} = (A^3)^6 \cdot A^2 = A^2 = -(A + E) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって $A^{20} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ である。

問題 6.6.2． 次を示せ．

(1) $A^2 = A$ をみたす正方行列 A は対角化可能である．

(2) $A^2 = E$ をみたす正方行列 A は対角化可能である．

(解答例)

(1) フロベニウスの定理から行列 A の固有値を λ とすると $\lambda^2 = \lambda$ である。ゆえに $\lambda = 0, 1$ である。固有値 $\lambda = 0, 1$ をそれぞれ対角成分にもつ $n - r,\ r$ 次の上三角行列をそれぞれ $T_0,\ T_1$ とすると，適当な正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} T_0 & C \\ O & T_1 \end{pmatrix}$$

の形の上三角行列に変形できる。ここで，C はある $(r, n-r)$ 行列である。$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP$ より

$$\begin{pmatrix} T_0 & C \\ O & T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 & C \\ O & T_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_0 & C \\ O & T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0^2 & T_0C + CT_1 \\ O & T_1^2 \end{pmatrix}$$

だから $T_0^2 = T_0,\ T_1^2 = T_1$ が得られる。

最初に，$T_0^2 = T_0$ ならば $T_0 = O$ を示す。T_0 の (i, j) 成分を c_{ij} とすると

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & (j \leq i) \\ c_{ij} & (i < j) \end{cases}$$

である。T_0^2 の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{s=1}^{n-r} c_{is}c_{sj}$ であるが，T_0 が上三角行列であるから，T_0^2 の (i,j) 成分において，$i \geq j$ の場合はすべて 0 である。これより，T_0^2 の (i,j) 成分において，$i<j$ の場合の成分について調べる。T_0^2 も上三角行列なので，下の行で後ろの列から順に上の行について見ていく。はじめに，第 $(n-r-1)$ 行について

$$\sum_{s=1}^{n-r} c_{n-r-1s}c_{sn-r} = c_{n-r-1n-r}c_{n-rn-r} = 0.$$

これが $T_0^2 = T_0$ より，T_0 の $(n-r-1, n-r)$ 成分に等しいから $c_{n-r-1n-r} = 0$ である。つぎに，第 $(n-r-2)$ 行について

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n-r} c_{n-r-2s}c_{sn-r} &= c_{n-r-2n-r-1}c_{n-r-1n-r} + c_{n-r-2n-r}c_{n-rn-r} \\
&= c_{n-r-2n-r-1}\cdot 0 + c_{n-r-2n-r}\cdot 0 = 0, \\
\sum_{s=1}^{n-r} c_{n-r-2s}c_{sn-r-1} &= c_{n-r-2n-r-1}c_{n-r-1n-r-1} + c_{n-r-2n-r}c_{n-rn-r-1} \\
&= c_{n-r-2n-r-1}\cdot 0 + c_{n-r-2n-r}\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

はそれぞれ T_0 の $(n-r-2, n-r)$, $(n-r-2, n-r-1)$ 成分に等しいから $c_{n-r-2n-r} = 0$ および $c_{n-r-2n-r-1} = 0$ である。この同様の操作を下の行から上の行に，後ろの列から前の列に行うことで，行列 T_0 の (i,j) 成分において，$i<j$ の場合もすべて成分が 0 となることが分かる。これより $T_0 = O$ である。

同様にして $T_1 = E$ を示す。T_1 の (i,j) 成分を d_{ij} で表すと

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & (i>j) \\ 1 & (i=j) \\ d_{ij} & (i<j) \end{cases}$$

である。T_1^2 の (i,j) 成分は $\displaystyle\sum_{s=1}^{r} d_{is}d_{sj}$ であるが，T_1 が上三角行列であるから，T_1^2 の (i,j) 成分において，$i>j$ の場合はすべて 0 であり，$i=j$ の場合は 1 である。これより，T_1^2 の (i,j) 成分において，$i<j$ の場合の成分について調べる。T_1^2 も上三角行列なので，下の行で後ろの列から順に上の行について見ていく。はじめに，第 $(r-1)$ 行について

$$\sum_{s=1}^{r} d_{r-1s}d_{sr} = d_{r-1r-1}d_{r-1r} + d_{r-1r}d_{rr} = 1\cdot d_{r-1r} + d_{r-1r}\cdot 1 = 2d_{r-1r}.$$

これが $T_1^2 = T_1$ より，T_1 の $(r-1, r)$ 成分 d_{r-1r} に等しいから $d_{r-1r} = 0$ である。つぎに，第 $(r-2)$ 行について

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{r} d_{r-2s}d_{sr} &= d_{r-2r-2}d_{r-2r} + d_{r-2r-1}d_{r-1r} + d_{r-2r}d_{rr} \\
&= 1\cdot d_{r-2r} + d_{r-2r-1}\cdot 0 + d_{r-2r}\cdot 1 = 2d_{r-2r}, \\
\sum_{s=1}^{r} d_{r-2s}d_{sr-1} &= d_{r-2r-2}d_{r-2r-1} + d_{r-2r-1}d_{r-1r-1} + d_{r-2r}d_{rr-1} \\
&= 1\cdot d_{r-2r-1} + d_{r-2r-1}\cdot 1 + d_{r-2r}\cdot 0 = 2d_{r-2r-1}
\end{aligned}$$

はそれぞれ T_1 の $(r-2,r)$, $(r-2,r-1)$ 成分に等しいから $d_{r-2r}=0$ および $d_{r-2r-1}=0$ である。この同様の操作を下の行から上の行に，後ろの列から前の列に行うことで，行列 T_1 の (i,j) 成分において，$i<j$ の場合もすべて成分が 0 となることが分かる。これより $T_1=E$ である。

これより

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} O & C \\ O & E \end{pmatrix}$$

となる。また

$$\begin{pmatrix} O & C \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & C \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & C \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & C \\ O & E \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} E & C \\ O & E \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} O & C \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & C \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

となる。ここで，$Q=P\begin{pmatrix} E & C \\ O & E \end{pmatrix}$ とおくと $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}$ となるから，行列 A は対角化可能であることが分かる。

(2) $B=\frac{1}{2}(E-A)$ とおくと $A^2=E$ より

$$B^2=\frac{1}{4}(E-2A+A^2)=\frac{1}{2}(E-A)=B$$

となり，$B^2=B$ である。(1) より，適当な正則行列 P を用いて

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} O_{n-r,n-r} & O \\ O & E_r \end{pmatrix}$$

と表せる。$A=E-2B$ だから

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= P^{-1}(E-2B)P=E-2P^{-1}BP \\ &= E-2\begin{pmatrix} O_{n-r,n-r} & O \\ O & E_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-r} & O \\ O & -E_r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり行列 A は対角化可能であることが分かる。

問題 6.6.3. A を $A^n=O$, $A\neq O$ となる行列とする．このとき A は対角化できないことを示せ．

(解答例)

行列 A の固有値を λ とする。フロベニウスの定理から $A^n=O$ より $\lambda^n=0$ となる。ゆえに，$\lambda=0$. すなわち，行列 A の固有値はすべて 0 である。

行列 A が対角化可能とすると，適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP=O$$

と表せるから $A=POP^{-1}=O$ となり，$A\neq O$ に矛盾する。背理法により，行列 A は対角化不可能である。

問題 7.2.2. 有心 2 次曲線は中心 $\boldsymbol{u}_0$ に関して点対称であることを示せ．すなわち $f(\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u})=f(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u})$ が成り立つことを示せ.

(解答例)

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}) &= {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}+f(\boldsymbol{u}_0) \\ &= {}^t(-\boldsymbol{u})A(-\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{u}_0) \\ &= f(\boldsymbol{u}_0-\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

これより，有心 2 次曲線は中心 $\boldsymbol{u}_0$ に関して点対称である。

問題 7.2.5. 次の 2 次曲線の標準形を求めよ.

(1) $3x^2-10xy+3y^2+2x+2y+3=0$

(2) $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-8y=0$

(3) $2x^2-4xy+5y^2-4y-1=0$

(解答例)

(1) $3x^2-10xy+3y^2+2x+2y+3=0$ より

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

このとき，$|\,A\,|=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=-16\,(\neq 0)$ より題意の 2 次曲線は有心 2 次曲線である。また

$$|\,\widetilde{A}\,|=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -8 & -8 \\ 0 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}=-64$$

である。行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 5 \\ 5 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^2-25=(\lambda+2)(\lambda-8)$$

だから行列 A の固有値は $\lambda=-2,\ 8$ である。

固有値 $\lambda=-2$ のときの固有ベクトルは $(-2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解である。$x-y=0$ より $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda=8$ のときの固有ベクトルは $(8E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解である。$x+y=0$ より $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる。

これより直交行列を

$$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

とすると

$${}^tPAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

となる。

また，$|\,A\,|\neq 0$ より $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解

$$\boldsymbol{u}_0=A^{-1}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

をもつ。この $\boldsymbol{u}_0$ が中心である。

$$f(\boldsymbol{u}_0)={}^t\boldsymbol{u}_0A\boldsymbol{u}_0+2(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{b})+3=4$$

だから $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}_0$ とおくと ${}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}+4=0$ となる。直交行列 P に対して，$\boldsymbol{u}=P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}0&={}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u}+4\\ &={}^t\left(P\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\right)AP\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+4\\ &=(X,\,Y){}^tPAP\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+4\\ &=(X,\,Y)\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}+4\\ &=-2X^2+8Y^2+4.\end{aligned}$$

これより変数 X, Y をそれぞれ x, y に置き直すと，標準形は双曲線

$$-\frac{1}{2}x^2+2y^2+1=0$$

である。

(追加)　主軸の方程式を求める。中心 $\boldsymbol{u}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_1$ 方向の直線は

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

より $x-y=0$ である。また，中心 $\boldsymbol{u}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_2$ 方向の直線は

$$\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

より $x+y+1=0$ である。これより主軸の方程式は

$$x-y=0, \qquad x+y+1=0$$

である。

(2) $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-8y=0$ より

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

このとき，$|A|=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{vmatrix}=0$ より題意の 2 次曲線は無心 2 次曲線である。また

$$|\widetilde{A}|=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-16$$

である。行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \lambda-3 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)$$

だから行列 A の固有値は $\lambda=0,\ 4$ である。

固有値 $\lambda=4$ のときの固有ベクトルは $(4E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解である。$\sqrt{3}\,x-y=0$ より $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda=0$ のときの固有ベクトルは $-A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解である。$x+\sqrt{3}\,y=0$ より $\boldsymbol{x}=t\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる。

これより直交行列を

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$${}^tPAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とし，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{u}$ とすると

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(P\boldsymbol{u})A(P\boldsymbol{u})={}^t\boldsymbol{u}\,{}^tPAP\boldsymbol{u}=(u,\,v)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=4u^2,$$

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{b},P\boldsymbol{u})={}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{u}=-2(\sqrt{3}\,u-v).$$

これより

$$0 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + 0 = 4u^2 - 4(\sqrt{3}\,u - v) = 4\left(u - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4\left(v - \frac{3}{4}\right)$$

だから

$$u - \frac{\sqrt{3}}{2} = X, \qquad v - \frac{3}{4} = Y$$

とおくと $4X^2 + 4Y = 0$ となる。変数 X, Y をそれぞれ x, y に置き直すと，標準形は放物線

$$2x^2 + 2y = 0$$

である。

(追加)　主軸の方程式を求める。$X = u - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Y = v - \frac{3}{4}$ より

$$\boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = P\boldsymbol{u}_0 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 5\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

だから，点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_1$ 方向の直線は

$$\frac{x - \dfrac{5\sqrt{3}}{8}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{y - \dfrac{3}{8}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$$

より $2\sqrt{3}\,x - 2y - 3 = 0$ である。また，点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_2$ 方向の直線は

$$\frac{x - \dfrac{5\sqrt{3}}{8}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \dfrac{3}{8}}{-\dfrac{1}{2}}$$

より $x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} = 0$ である。これより主軸の方程式は

$$2\sqrt{3}\,x - 2y - 3 = 0, \qquad x + \sqrt{3}\,y - \sqrt{3} = 0$$

である。

(3) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 4y - 1 = 0$ より

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

このとき，$|\,A\,| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6\,(\neq 0)$ より題意の 2 次曲線は有心 2 次曲線である。また

$$|\,\widetilde{A}\,| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -14$$

である。行列 A の固有多項式は

$$\phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

だから行列 A の固有値は $\lambda = 1,\ 6$ である。

固有値 $\lambda = 1$ のときの固有ベクトルは $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解である。$x - 2y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる。

固有値 $\lambda = 6$ のときの固有ベクトルは $(6E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解である。$2x + y = 0$ より $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (t は任意定数) だから，単位固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がとれる。

これより直交行列を

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

とすると

$${}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となる。

また，$|\,A\,| \neq 0$ より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解

$$\boldsymbol{u}_0 = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

をもつ。この $\boldsymbol{u}_0$ が中心である。

$$f(\boldsymbol{u}_0) = {}^t\boldsymbol{u}_0 A\boldsymbol{u}_0 + 2(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{b}) - 1 = -\frac{7}{3}$$

だから $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}_0$ とおくと ${}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u} - \frac{7}{3} = 0$ となる。直交行列 P に対して，$\boldsymbol{u} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned}
0 &= {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u} - \frac{7}{3} \\
&= {}^t\left(P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)AP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \frac{7}{3} \\
&= (X,\,Y)\,{}^tPAP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \frac{7}{3} \\
&= (X,\,Y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \frac{7}{3} \\
&= X^2 + 6Y^2 - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

これより変数 X, Y をそれぞれ x, y に置き直すと，標準形はだ円

$$-\frac{3}{7}\,x^2-\frac{18}{7}\,y^2+1=0$$

である。

(追加)　主軸の方程式を求める。中心 $\boldsymbol{u}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_1$ 方向の直線は

$$\frac{x+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{y+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$$

より $3x-6y-2=0$ である。また，中心 $\boldsymbol{u}_0$ を通り $\boldsymbol{p}_2$ 方向の直線は

$$\frac{x+\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{y+\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$$

より $2x+y+2=0$ である。これより主軸の方程式は

$$3x-6y-2=0, \qquad 2x+y+2=0$$

である。