令和３年度線形代数学Ⅱ試験問題（河邊担当）

令和３年８月６日 9:00〜10:10

[1] 次のベクトルの組が１次独立か１次従属かを判定せよ．また，１次従属ならば１つのベクトルを他のベクトルの１次結合で表せ．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[2] $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 :\ \begin{array}{c} x + 2z - w = 0 \\ x - y - w = 0 \\ 2x - 3y - 2z - 2w = 0 \\ x - 3y - 4z - w = 0 \end{array} \right\}$$

の基底と次元を求めよ．

[3] 次のベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問に答えよ．

(1) 基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ から基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ への基底の変換行列 P を求めよ．

(2) 基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に関する $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^3$ の成分表示 (座標ベクトル) が $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の成分表示 (座標ベクトル) を求めよ．

[4] $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ にグラム・シュミットの直交化法を適用して，$\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を作れ．

[5] 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化できないことを示せ．

[6] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) A の固有値を求めよ．

(2) 固有空間の基底を求めよ．

(3) A の対角化可能性を判定し，対角化可能ならば正則行列 P を求めて対角化せよ．

令和3年度線形代数学II試験の解答

1 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\-1&0&1&2\\2&2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&1&2&5\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&1&3\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore \operatorname{rank}A=3$ $\therefore$ a_1, a_2, a_3, a_4 は1次従属

また, $a_4=a_1-a_2+3a_3$

2 $\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&-1&0&-1\\2&-3&-2&-2\\1&-3&-4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&-1&-2&0\\0&-3&-6&0\\0&-3&-6&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases}x+2z-w=0\\y+2z=0\end{cases}$ $\therefore \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s+t\\-2s\\s\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore W=\left\langle \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$

よって. Wの基底は $\left\{\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ で $\dim W=2$

$\boxed{3}$ (1) 基底の変換行列の定義より

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)P \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

(2) $\mathbf{u}$の$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$に関する成分表示が $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ なので、$\mathbf{u}$の$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$に関する成分表示を $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -6 \\ 17 \\ -12 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{4}$ $$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{a}_1\|}\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2' = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1+0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0-1\\2-1\\2-0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_2'\|}\mathbf{b}_2' = \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3' = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+0+0)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}(-1+0+2)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6-3+1\\0-3-1\\6-0-2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_3'\|}\mathbf{b}_3' = \frac{1}{\cancel{\frac{2}{3}}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\cancel{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

以上より，求める正規直交基底は

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\boxed{5}$ ① 固有値

$$\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1) - 4 - 4 + 4(\lambda-2) - 4(\lambda-4) + \lambda - 1$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-2)(\lambda-1) + \lambda - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2 = 0$$

$\therefore \lambda = 1, 3$ (2重解)

② 対角化可能性の判定

$$3E-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(3E-A) = 2 \neq 1 = 3-2$. よって A は対角化できない.

$\boxed{6}$ (1) $\varphi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$$= \lambda(\lambda-2)^2 + 1 + 1 - \lambda + (\lambda-2) + \lambda - 2 = \lambda(\lambda-2)^2 + (\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2 \quad \therefore \lambda = 1 \text{ (2重解)}, 2$$

(2) $V(1) = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid (E-A)x = 0\}$

$$E-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore x - y + z = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(2) = \{ x \in \mathbb{C}^3 \mid (2E-A)x = 0 \}$$

$$2E-A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x \quad -z = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(3) $\dim V(1) = 2 =$ 固有値1の重複度, $\dim V(2) = 1 =$ 固有値2の重複度

よって. Aは対角化可能で, $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$