1 章 確率と確率分布

確率論: 自然現象や社会現象における不確実を記述するための数学的道具

- 古典的確率論: パスカル (1623–1662)，フェルマ (1601–1665)，ベルヌイ (1654–1705)，ド・モアブル (1667–1754)，ラプラス (1749-1827) などにより解析的，組み合わせ論的に展開された確率論

- 測度論的確率論: 1933 年にコフモゴロフ (1903–1987) によって導入された確率の公理に基づき展開された確率論

以下では，古典的確率論の基礎と，その応用として，初歩の数理統計学を学ぶ.

1.1 確率

1.1.1 確率とは

- **事象**: 偶然性に左右されて起こる現象

- **確率**: 事象が起こると期待される割合

確率の定め方

- **相対度数的定義**: 実験を N 回繰り返したとき，事象 A が N_A 回起こったとすれば，

$$P(A) := \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}$$

  と定義する．しかし，実際には実験を無限回続けることは不可能なので，十分大きな N に対して

$$P(A) := \frac{N_A}{N}$$

  と定める.
  例: 歪んだ硬貨を 1000 回投げて，表が 200 回出たとすると，表が出る事象 A の起こる確率を

$$P(A) = \frac{200}{1000} = 0.2$$

  と定める.

- **算術的定義**または**組み合わせ論的定義**: 全体で N 個の場合があって，それらは同様に確からしく起こると仮定する．事象 A の起こる場合の数が N_A であるとき

$$P(A) := \frac{N_A}{N}$$

  と定義する.
  例: サイコロを投げたとき，1 の目が出る事象 A の起こる確率を

$$P(A) = \frac{1\text{ の目が出る場合の数}}{\text{すべての場合の数}} = \frac{1}{6}$$

  と定める.

1.1.2 事象の表し方

- **試行**: 結果が偶然性に左右される実験
- **標本点**: 1 つの試行において起こる分解不可能な結果．ω で表す.
- **標本空間**: すべての標本点からなる集合．Ω で表す.
- **事象**: 標本点からなる集合，i.e.，Ω の部分集合．A，B，C，$\cdots\cdots$ などで表す.
- **事象が起こる**: 事象 A に属するどれか一つの標本点が起こるとき，A が起こるという.

事象の種類	集合としての意味	事象としての意味
全事象 Ω	すべての標本点からなる集合	必ず起こる事象
空事象 $\emptyset$	標本点を 1 つも含まない集合	絶対に起こらない事象
和事象 $A \cup B$	A と B の和集合，i.e.，A と B に属する標本点を合わせて得られる集合	A，B の少なくとも一方が起こる事象
積事象 $A \cap B$	A と B の積集合，i.e.，A と B のどちらにも属する標本点からなる集合	A，B が同時に起こる事象
余事象 A^c	A の補集合，i.e.，A に属さない標本点からなる集合	A が起こらない事象

和事象 $A \cup B$　　　　積事象 $A \cap B$　　　　余事象 A^c

- 事象 A と B が互いに排反 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 2 つの事象 A と B は同時には起こらない，i.e.，$A \cap B = \emptyset$
- 包含関係「$A \subset B$」は,「事象 A が起これば必ず事象 B が起こる」ことを表す.

A と B は互いに排反　　　　A が起これば必ず B が起こる

1.1.3 確率の基本的性質

確率の基本的性質 (実際には公理！)

(I) 任意の事象 A に対して，$0 \leqq P(A) \leqq 1$.

(II) $P(\Omega) = 1$，$P(\emptyset) = 0$.

(III) 事象 A と B が互いに排反ならば，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

上の 3 つの性質 (公理) から確率のもつすべての性質が導かれる！

(IV) 加法定理: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(V) 余事象の確率の公式: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

例 (加法定理の応用): 世帯総数が 50 のある過疎の村で，ステレオのある世帯が 12，ビデオのある世帯が 8，両方ともあるのが 3 世帯とする．任意に選んだ世帯が，ステレオかビデオのいずれかを持っている確率を求めよ．

1.2 事象の独立性とベイズの定理

1.2.1 事象の独立性

- 2 つの事象 A と B が**互いに独立** (文学的定義) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 事象 A と B の起こり方が互いに影響を与えない．

- 条件付き確率 (文学的定義)

$$P(A|B) := \text{仮に } B \text{ が起こるとしたときに}, A \text{ が起こる確率}$$

この確率を，条件 B のもとで，A の起こる**条件付き確率**という．

$$P(B|A) := \text{仮に } A \text{ が起こるとしたときに}, B \text{ が起こる確率}$$

この確率を，条件 A のもとで，B の起こる**条件付き確率**という．

例 (条件付き確率の意味): 生徒数 50 人のクラスで，男子は 30 人，メガネ使用者は 18 人，男子でメガネを使うのは 12 人である．今，出席簿からでたらめに 1 人抜き出し，その生徒が男子である事象を A，その生徒がメガネを使用している事象を B とする．このとき，$P(A)$，$P(A \cap B)$，$P(B|A)$，$P(A|B)$ を求めよ．

- 条件付き確率 (数学的定義)

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0), \qquad P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0)$$

すなわち，$P(A|B)$ は，全空間を B に制限したときの A の起こる割合，$P(B|A)$ は，全空間を A に制限したときの B の起こる割合を表す．

(VI) 乗法定理: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

(VII) 独立性の判定条件: 以下は同値．

(i) A と B は互いに独立 (文学的定義)
すなわち，A と B の起こり方が互いに影響を与えない．

(ii) $P(A|B) = P(A)$
すなわち，B が起こると仮定してもしなくても，A の起こる確率は変わらない．

(iii) $P(B|A) = P(B)$
すなわち，A が起こると仮定してもしなくても，B の起こる確率は変わらない．

(iv) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (数学的定義)
すなわち，A と B が同時に起こる確率は，A の起こる確率と B の起こる確率の積である．

例 (くじの順序は気にするな！): 白玉 m 個，黒玉 n 個入った壺から，a 君と b 君が順に 1 個玉を取るとき，それぞれが白玉を取る確率を求めよ．ただし，取った玉は戻さないものとする (非復元抽出).

1.2.2 ベイズの定理

条件付き確率は，原因 A と結果 B の因果関係の強さを表すと解釈する場合もある (条件付き確率の拡大解釈).

- $P(B|A)$: 原因 A により結果が B となる確率
  $\leftarrow$ 今までの経験や実験で値がわかっていることが多い
- $P(A|B)$: 結果が B であったとき，その結果を引き起こした原因が A である確率
  $\leftarrow$ ほんとの場合は未知

(VIII) 全確率の定理: 事象 A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が互いに排反，つまり $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ であり，しかも $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ であるとき，任意の事象 B に対して

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)$$

が成り立つ．この定理は，結果が B となる確率を，それを引き起こす各原因 A_i の寄与の度合いに分解したと考えることができる．

(IX) ベイズの定理: 結果 B を引き起こす原因として $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が考えられ，これらはすべて互いに排反とする．もし，結果が B であったとき，その結果を引き起こした原因が A_i である確率 $P(A_i|B)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}$$

で与えられる．

例 (ベイズの定理の応用): a，b，c の 3 人がクッキーを持ち寄った．割合はそれぞれ 35%，40%，25%で，そのうち，8%，5%，3%の割れクッキーが含まれていた．さて，d が試食しようと 1 個をつまみ上げたところ，割れクッキーであった．これを a が作った確率はいくらか．

関連 URL:
http://www.shinshu-u.ac.jp/faculty/engineering/appl/2017/math/kawabe/kawabe.htm