令和3年度応用数学I試験問題（河邊担当）

令和3年8月6日 13:00〜14:10

[1] 変数 x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$x^2\frac{dy}{dx} + (1-2x)y = x^2$$

の一般解を求めよ．

[2] 積分因子を見つけ，全微分方程式

$$(x^2+y)dx - xdy = 0$$

の一般解を求めよ．

[3] 変数 x の関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$y'' - y' - 6y = \cos x$$

の一般解を，ラプラス変換を用いずに解け．**ラプラス変換を用いた場合は零点とします．**

[4] 変数 t の関数 $f = f(t)$ に関する次の初期値問題を解け．

$$f'' + 2f' + f = e^{-t}; \qquad f(0) = 0,\ f'(0) = 1$$

[5] 変数 t の関数 $f = f(t)$，$g = g(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{cases} f' + 2g = \cos t \\ f - g' = \sin t \end{cases}$$

を，初期条件 $f(0) = 0$，$g(0) = 1$ のもとで解け．

~~令~~和3年度応用数学I試験の解答

[1] $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$ ← 1階線形

① $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1-2x}{x^2} \cdot y = 0$ を解く

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{x^2} y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\therefore \log y = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{dx}{x^2} = 2\log x - \frac{1}{-2+1} x^{-1} + c = \log x^2 + \frac{1}{x} + c$$

$$= \log e^c \cdot x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore y = e^c \cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} \quad \therefore y = c x^2 e^{\frac{1}{x}}$$

② $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} v$ が与式を満たすように v を定める.

$$y' = 2x e^{\frac{1}{x}} v + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} v + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \frac{dv}{dx}$$

$$= (2x-1) e^{\frac{1}{x}} v + x^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dv}{dx}$$

これを与式に代入:

$$(2x-1) e^{\frac{1}{x}} v + x^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dv}{dx} + \frac{1-2x}{x^2} \cdot x^2 e^{\frac{1}{x}} v = 1$$

$$\therefore x^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dv}{dx} = 1 \quad \therefore \frac{dv}{dx} = x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \therefore v = e^{-\frac{1}{x}} + c$$

$$\therefore y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \left(e^{-\frac{1}{x}} + c\right) = \underline{c x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2}$$

[2] $P = x^2 + y$, $Q = -x$ とおくと, $P_y = 1$, $Q_x = -1$ $\therefore P_y \neq Q_x$ ∴ 完全でない.

積分因子を $\mu = x^m y^n$ とおくと.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{m+2} y^n + x^m y^{n+1}\right) = n x^{m+2} y^{n-1} + (n+1) x^m y^n$$

$\frac{\partial}{\partial x}(-x^{m+1}y^n) = -(m+1)x^m y^n$

$\therefore P_y = Q_x \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n+1 = -(m+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ n=0 \end{cases}$

よって. 積分因子は $\mu = \frac{1}{x^2}$

$\therefore \left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$ は完全

① $u_x = 1+\frac{y}{x^2}$ となる u を求める

$u = \int \left(1+\frac{y}{x^2}\right)dx = x - \frac{y}{x} + w(y)$

② $u_y = -\frac{1}{x}$ となる $w(y)$ を求める.

$-\frac{1}{x} + \frac{dw}{dy} = -\frac{1}{x} \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 0 \quad \therefore w(y) = 0$

③ 以上より. $u = x - \frac{y}{x}$. ゆえに. 一般解は $x - \frac{y}{x} = c$

$\boxed{3}$ ① 基本解: $\lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \quad \therefore \lambda = 3, -2$

$\therefore y_1 = e^{3x},\ y_2 = e^{-2x}$

② 推測特殊解: $y_0 = a\sin x + b\cos x \quad \therefore y_0' = a\cos x - b\sin x$

$y_0'' = -a\sin x - b\cos x$. これらを与式に代入.

$(-a\sin x - b\cos x) - (a\cos x - b\sin x) - 6(a\sin x + b\cos x) = \cos x$

$\therefore (b-7a)\sin x - (a+7b+1)\cos x = 0$

$\therefore \begin{cases} b-7a=0 \\ a+7b+1=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=-1/50 \\ b=-7/50 \end{cases}$ $\therefore y_0 = -\frac{1}{50}\sin x - \frac{7}{50}\cos x$

③ 一般解： $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{50}\sin x - \frac{7}{50}\cos x$

$\boxed{4}$ ① ラプラス変換：

$$s^2 F - \underbrace{f(0)}_{=0} s - \underbrace{f'(0)}_{=1} + 2(sF - \underbrace{f(0)}_{=0}) + F = \frac{1}{s+1}$$

$$\therefore s^2 F - 1 + 2sF + F = \frac{1}{s+1}$$

② Fについて解く

$$(s^2+2s+1)F = 1 + \frac{1}{s+1} \quad \therefore (s+1)^2 F = 1 + \frac{1}{s+1}$$

$$\therefore F = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}$$

③ ラプラス逆変換

$$F = \mathcal{L}(t)(s+1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(t^2)(s+1)$$

$$= \mathcal{L}(e^{-t}t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-t}t^2) = \mathcal{L}\left(e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t}t^2\right)$$

$$\therefore f(t) = \left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-t}$$

No. 4

Date

$\boxed{5}$ ① ラプラス変換

$$\begin{cases} sF - f(0) + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ F - (sG - g(0)) = \dfrac{1}{s^2+1} \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} sF + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ F - sG = \dfrac{1}{s^2+1} - 1 \end{cases}$$

② F, Gについて解く

$$\begin{cases} sF + 2G = \dfrac{s}{s^2+1} \\ sF - s^2G = \dfrac{s}{s^2+1} - s \end{cases} \quad \therefore (s^2+2)G = s \quad \therefore G = \frac{s}{s^2+2}$$

$$\therefore F = sG + \frac{1}{s^2+1} - 1 = \frac{s^2}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+1} - 1 = 1 - \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+1} - 1$$

$$= \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+2}$$

③ ラプラス逆変換：

$$F = \frac{1}{s^2+1} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{s^2+2} = \mathcal{L}(\sin t) - \sqrt{2}\,\mathcal{L}(\sin\sqrt{2}t)$$

$$= \mathcal{L}(\sin t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t) \quad \therefore \underline{f(t) = \sin t - \sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t}$$

一方，

$$G = \frac{s}{s^2+2} = \mathcal{L}(\cos\sqrt{2}t) \quad \therefore \underline{g(t) = \cos\sqrt{2}\,t}$$