問題1.1

$\boxed{1}$ (1) 1階常微分方程式 (2) 2階偏微分方程式 (3) 1階偏微分方程式
(4) 3階常微分方程式 (5) 2階常微分方程式 (6) 4階偏微分方程式

$\boxed{2}$ (1) $y = C\cos x$ $\therefore y' = -C\sin x$. よって $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{-C\sin x}{C\cos x} = -\tan x$ $\therefore y' + y\tan x = 0$.

$1 = y(0) = C\cdot\cos 0 = C$ $\therefore C = 1$ $\therefore \underline{y = \cos x}$

(2) $\sin y = x - 1 + Ce^{-x}$ の両辺を x について微分すると. $y'\cos y = 1 - Ce^{-x}$. よって.

$\sin y = x - (1 - y'\cos y) = x - y'\cos y$ $\therefore y'\cos y + \sin y = x$ $\therefore y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$.

$x = 0$ のとき $y = \dfrac{\pi}{6}$ であるから. $\sin\dfrac{\pi}{6} = 0 - 1 + C$ $\therefore C = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ $\therefore \underline{\sin y = x - 1 + \dfrac{3}{2}e^{-x}}$

(3) $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2c(t-1)}{(t-1)^4} = -\dfrac{2c}{(t-1)^3}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ct(t-1)^2 - ct^2\cdot 2(t-1)}{(t-1)^4}$

$= \dfrac{2ct(t-1) - 2ct^2}{(t-1)^3} = \dfrac{2ct^2 - 2ct - 2ct^2}{(t-1)^3} = \dfrac{-2ct}{(t-1)^3}$

$\therefore y' = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-2ct}{(t-1)^3}\cdot\left(-\dfrac{(t-1)^3}{2c}\right) = t$ $\therefore x(y')^2 - (y')^2 = xt^2 - t^2 = t^2(x-1)$

$= t^2\cdot\dfrac{c}{(t-1)^2} = y$ $\therefore y = x(y')^2 - (y')^2$.

$x = 1 + \dfrac{c}{(t-1)^2}$

$x = 0$ のとき $y = 0$ とする. このとき. $0 = 1 + \dfrac{c}{(t-1)^2}$ $\therefore c = -(t-1)^2$.

$\therefore y = \dfrac{t^2}{(t-1)^2}\left(-(t-1)^2\right) = -t^2$. $y = 0$ であるから $t = 0$ $\therefore C = -1$. よって

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{1}{(t-1)^2} \\ y = \dfrac{-t^2}{(t-1)^2} \end{cases}$$

(4) $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$, $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$, $y'' = c_1e^x + c_2e^{-x} = y$ $\therefore y'' - y = 0$

$y(0) = c_1 + c_2 = 0$, $y(1) = c_1e + c_2e^{-1} = 1$ $\therefore c_2 = -c_1$, $\therefore \dfrac{c_1e^2 - c_1}{e} = 1$

$c_1 = \frac{e}{e^2-1}$ ∴ $c_2 = -\frac{e}{e^2-1}$ ∴ $y = \frac{e}{e^2-1}(e^x - e^{-x})$

$\boxed{3}$ (1) $cy = x + \frac{c^2}{2}$ ∴ $cy' = 1$ ∴ $c = \frac{1}{y'}$ ∴ $\frac{y}{y'} = x + \frac{1}{2(y')^2}$

∴ $2yy' = 2x(y')^2 + 1$

(2) $\tan(x+c) = \frac{y}{x}$ ∴ $x + c = \tan^{-1}\frac{y}{x}$. 両辺をxで微分すると

$$1 = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{xy' - y}{x^2+y^2}$$ ∴ $xy' - y = x^2 + y^2$

(3) $y = x^c$ ∴ $\log y = c\log x$ ∴ $c = \frac{\log y}{\log x}$. 両辺をxで微分すると

$$0 = \frac{\frac{1}{y}y'\log x - (\log y)\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$ ∴ $\frac{y'}{y}\log x = \frac{\log y}{x}$ ∴ $y'\cdot x\log x = y\log y$

(4) $y = c_1e^x + c_2xe^{2x}$

$y' = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2c_2xe^{2x}$

∴ $y' - y = c_2e^{2x} + c_2xe^{2x}$ ∴ $c_2(1+x) = e^{-2x}(y'-y)$ ……①

①の両辺をxで微分

$$c_2 = -2e^{-2x}(y'-y) + e^{-2x}(y''-y') = e^{-2x}(-2y'+2y+y''-y') = e^{-2x}(y''-3y'+2y)$$

これを①に代入

$(1+x)\cancel{e^{-2x}}(y''-3y'+2y) = \cancel{e^{-2x}}(y'-y)$ ∴ $y''-3y'+2y+xy''-3xy'+2xy-y'+y=0$

∴ $(1+x)y'' - (3x+4)y' + (2x+3)y = 0$

(5) $y = \frac{1}{c_1x+c_2} + 1$ ∴ $y - 1 = \frac{1}{c_1x+c_2}$ ∴ $y' = -\frac{c_1}{(c_1x+c_2)^2} = -c_1(y-1)^2$

∴ $\frac{y'}{(y-1)^2} = -c_1$ 両辺をxで微分:

$$\frac{y''(y-1)^2 - y' \cdot 2(y-1)y'}{(y-1)^4} = 0 \quad \therefore y''(y-1)^2 - 2(y')^2(y-1) = 0$$

$$\therefore (y-1)y'' - 2(y')^2 = 0$$

(6) $c_1x^2 + c_2y^2 = 1 \quad \therefore 2c_1x + 2c_2y \cdot y' = 0 \cdots ①$

$\therefore 2c_1 + 2c_2\{(y')^2 + y \cdot y''\} = 0 \cdots ②$

$② \times x : 2c_1x + 2c_2\{x(y')^2 + xy \cdot y''\} = 0 \cdots ②'$

$②' - ① : 2c_2\{x(y')^2 + xy \cdot y''\} - 2c_2yy' = 0 \quad \therefore x(y')^2 + xyy'' = yy'$

問題1.2.1

$\boxed{1}$ (1) $x\dfrac{dy}{dx} = -(y+1)$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{y+1} = -\dfrac{dx}{x}$ $\quad\therefore \log(y+1) = -\log x + c = \log\dfrac{e^c}{x}$

$\therefore y+1 = \dfrac{e^c}{x}$ $\quad\therefore y = \dfrac{c}{x} - 1$

(2) $(y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1-x$ $\quad\therefore (y+1)dy = (1-x)dx$ $\quad\therefore \dfrac{1}{2}(y+1)^2 = x - \dfrac{x^2}{2} + c$

$\therefore (y+1)^2 = 2x - x^2 + 2c$ $\quad\therefore (y+1)^2 = 2x - x^2 + c$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = (\tan y)(\tan x)$ $\quad\therefore \dfrac{dy}{\tan y} = \tan x\,dx$ $\quad\therefore \dfrac{\cos y}{\sin y}dy = \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$

$\therefore \displaystyle\int \frac{\cos y}{\sin y}dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + c$ $\quad\therefore \log\sin y = -\log\cos x + c = \log\dfrac{e^c}{\cos x}$

$\therefore \sin y = \dfrac{e^c}{\cos x}$ $\quad\therefore \sin y = \dfrac{c}{\cos x}$

(4) $xy(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 1+y^2$ $\quad\therefore \dfrac{y}{1+y^2}dy = \dfrac{dx}{x(1+x^2)}$

$\therefore \dfrac{1}{2}\log(1+y^2) = \displaystyle\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx + c = \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c = \log\frac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore \log\sqrt{1+y^2} = \log\dfrac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad\therefore \sqrt{1+y^2} = \dfrac{e^c\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad\therefore 1+y^2 = \dfrac{(e^c)^2x^2}{1+x^2}$

$\therefore (1+x^2)(1+y^2) = e^{2c}\cdot x^2$ $\quad\therefore (1+x^2)(1+y^2) = cx^2$

(5) $(1+x)y + 2(1-y)x\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\quad\therefore 2(y-1)x\dfrac{dy}{dx} = (x+1)y$

$\therefore \dfrac{y-1}{y}dy = \dfrac{x+1}{2x}dx$ $\quad\therefore \left(1-\dfrac{1}{y}\right)dy = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \displaystyle\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + c$ $\quad\therefore y - \log y = \dfrac{1}{2}(x + \log x) + c$

$\therefore 2y - 2\log y = x + \log x + 2c$ $\quad\therefore \log xy^2 = 2y - x - 2c$ $\quad\therefore xy^2 = e^{2y-x-2c}$

$\therefore xy^2 = e^{-2c}\cdot e^{2y-x}$ $\quad\therefore xy^2 = ce^{2y-x}$

(6) $y\dfrac{dy}{dx} = xe^{x^2}\cdot e^{y^2}$ $\quad\therefore ye^{-y^2}dy = xe^{x^2}dx$ $\quad\therefore \displaystyle\int ye^{-y^2}dy = \int xe^{x^2}dx + c$

$\therefore -\dfrac{e^{-y^2}}{2} = \dfrac{e^{x^2}}{2} + c$ $\quad\therefore -e^{-y^2} = e^{x^2} + 2c$ $\quad\therefore e^{x^2} + e^{-y^2} = c$

(7) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}=y^2-1$ ∴ $\dfrac{dy}{y^2-1}=-\dfrac{dx}{x^2-1}$

∴ $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+c$

∴ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{y-1}{y+1}=-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{x-1}{x+1}+c$ ∴ $\log\dfrac{y-1}{y+1}=\log e^{2c}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$

∴ $\dfrac{y-1}{y+1}=e^{c}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ ∴ $\dfrac{y-1}{y+1}=c\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$ ∴ $(y-1)(x-1)=c(x+1)(y+1)$

∴ $xy-y-x+1=c(xy+x+y+1)=cxy+cx+cy+c$

∴ $xy-y-cxy-cy=cx+c+x-1$ ∴ $\{(1-c)x-(1+c)\}y=(c+1)x+(c-1)$

∴ $y=\dfrac{(1+c)x-(1-c)}{(1-c)x-(1+c)}=\dfrac{x-\frac{1-c}{1+c}}{\frac{1-c}{1+c}x-1}$ ∴ $y=\dfrac{x-c}{cx-1}$

(8) $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c$

∴ $\sin^{-1}y+\sin^{-1}x=c$. ここで. $u=\sin^{-1}x$, $v=\sin^{-1}y$ とおくと. $x=\sin u$, $y=\sin v$.

∴ $\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$

∴ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\sin c$ ∴ $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c$

$\boxed{2}$ (1) $u=y-x$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=y'-1$ ∴ $1+\dfrac{du}{dx}=u^2$ ∴ $\dfrac{du}{u^2-1}=dx$

∴ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{u-1}{u+1}=x+c$ ∴ $\log\dfrac{u-1}{u+1}=2x+2c=\log e^{2c}\cdot e^{2x}$ ∴ $\dfrac{u-1}{u+1}=e^{2c}\cdot e^{2x}$

∴ $\dfrac{u-1}{u+1}=c_1e^{2x}$ ∴ $\dfrac{y-x-1}{y-x+1}=c_1e^{2x}$ ∴ $y-x-1=c_1e^{2x}y-c_1xe^{2x}+c_1e^{2x}$

∴ $(1-c_1e^{2x})y=x+1-c_1xe^{2x}+c_1e^{2x}$

∴ $(1-c_1e^{2x})y=x(1-c_1e^{2x})+1+c_1e^{2x}$ ∴ $y=x+\dfrac{1+c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}}$

∴ $y=x+\dfrac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$

(2) $u = x + e^y$ とおくと $\frac{du}{dx} = 1 + e^y \cdot y'$ ∴ $\frac{du}{dx} - 1 = u - 1$ ∴ $\frac{du}{dx} = u$ ∴ $\frac{du}{u} = dx$

∴ $\log u = x + c = \log e^c e^x$ ∴ $u = e^c \cdot e^x$ ∴ $u = c \cdot e^x$ ∴ $x + e^y = ce^x$

∴ $e^y = ce^x - x$ ∴ $y = \log(ce^x - x)$

(3) $u = xy$ とおくと $\frac{du}{dx} = y + xy'$ ∴ $xy' = \frac{du}{dx} - y$

∴ $y' = \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}$

∴ $(1-u)\left\{\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2}\right\} = y^2$ ∴ $(1-u)\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{u(1-u)}{x^2} = y^2$

∴ $x(1-u)\frac{du}{dx} - u(1-u) = u^2$ ∴ $x(1-u)\frac{du}{dx} = u$ ∴ $\left(\frac{1}{u} - 1\right)du = \frac{dx}{x}$

∴ $\log u - u = \log x + c$ ∴ $\log\frac{u}{x} = u + c$ ∴ $\log y = xy + c$ ∴ $y = e^{xy+c} = e^c \cdot e^{xy}$

∴ $y = ce^{xy}$

(4) $u = x - y$ とおくと $\frac{du}{dx} = 1 - y'$ ∴ $-\frac{du}{dx} = u\tan x$ ∴ $\frac{du}{u} = -\tan x\,dx$

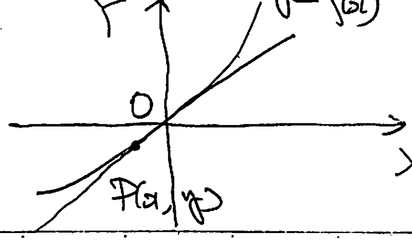
∴ $\frac{du}{u} = \frac{-\sin x}{\cos x}dx$ ∴ $\log u = \log\cos x + c = \log e^c \cdot \cos x$ ∴ $u = e^c \cdot \cos x$

∴ $u = c \cdot \cos x$ ∴ $x - y = c\cos x$ ∴ $y = x - c\cos x$

$\boxed{3}$ $u = ax + by + c$ とおくと $\frac{du}{dx} = a + by'$ ∴ $y' = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right)$

∴ $\frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right) = f(u)$ ∴ $\frac{du}{dx} = bf(u) + a$ ← x と u について変数分離形

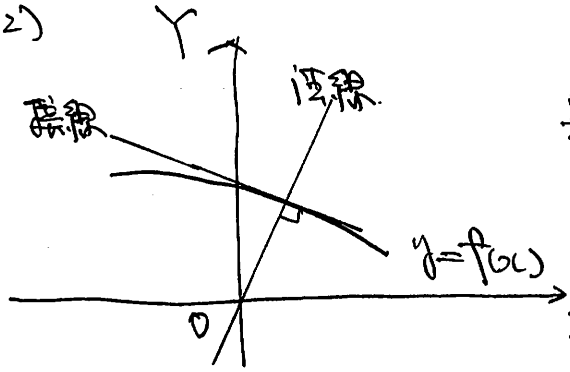
$\boxed{4}$ (1) 求める曲線を $y = f(x)$ とする 接線の方程式: $Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$



題意より $0 - y = \frac{dy}{dx}(0 - x)$ ∴ $x\frac{dy}{dx} = y$ ∴ $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

∴ $\log y = \log x + c = \log e^c \cdot x$ ∴ $y = e^c \cdot x$ ∴ $y = cx$

(2)



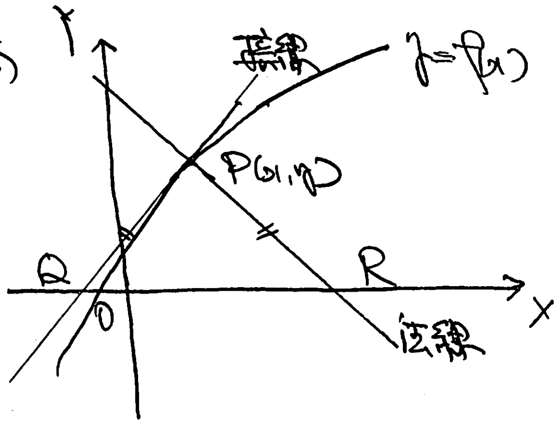
法線の方程式 $Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$

題意より $0-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(0-x)$ ∴ $y\frac{dy}{dx}=-x$

∴ $y\,dy=-x\,dx$ ∴ $\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c$

∴ $x^2+y^2=2c$ ∴ $x^2+y^2=c$

(3)



接線の方程式: $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$

Qの座標: $\left(x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}},\ 0\right)$

法線の方程式: $Y-y=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$

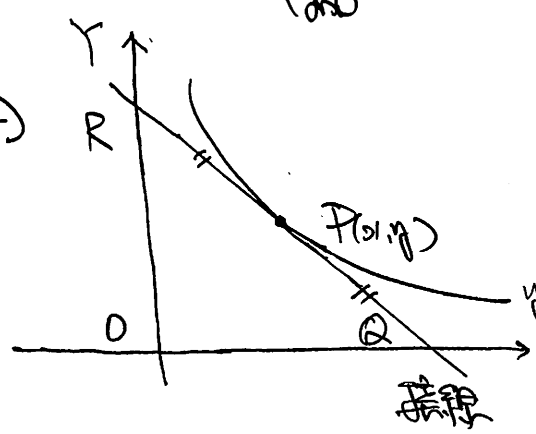
Rの座標 $\left(x+\frac{dy}{dx}y,\ 0\right)$

∴ $\overline{PQ}^2=\left\{x-\left(x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}\right)\right\}^2+y^2=\frac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+y^2$

$\overline{PR}^2=\left\{x-\left(x+\frac{dy}{dx}\cdot y\right)\right\}^2+y^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2y^2+y^2$

$\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$ より $\frac{y^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2y^2$ ∴ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=1$ ∴ $\frac{dy}{dx}=\pm1$ ∴ $y=\pm x+c$

(4)



接線の方程式 $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$

Qの座標 $\left(x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}},0\right)$, Rの座標 $\left(0,\ y-x\frac{dy}{dx}\right)$

題意より $x=\frac{x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}}{2}$ かつ $y=\frac{y-x\frac{dy}{dx}}{2}$

∴ $y=-x\frac{dy}{dx}$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$

∴ $\log y=-\log x+c=\log\frac{e^c}{x}$ ∴ $xy=e^c$ ∴ $xy=c$

問題1.2.2

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \dfrac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと. $y = xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$.

これらを与式に代入: $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{1+v^2}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{1+v^2} - v = \dfrac{2v-v-v^3}{1+v^2}$

$= \dfrac{v-v^3}{1+v^2}$ $\therefore \dfrac{1+v^2}{v(1-v^2)}dv = \dfrac{dx}{x}$ $\therefore \displaystyle\int\left(\frac{1}{v} + \frac{2v}{1-v^2}\right)dv = \log x + c$.

$\therefore \log v - \log(1-v^2) = \log x + c$ $\therefore \log\dfrac{v}{1-v^2} = \log e^c\cdot x$ $\therefore \dfrac{v}{1-v^2} = e^c\cdot x$.

$\therefore \dfrac{v}{1-v^2} = cx$ $\therefore \dfrac{xy}{x^2-y^2} = c\cancel{x}$ $\therefore x^2-y^2 = \dfrac{1}{c}y$ $\therefore x^2-y^2 = cy$

(2) $xy\dfrac{dy}{dx} = y^2-x^2$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-x^2}{xy} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{\frac{y}{x}}$. $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと. $y = xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

これらを与式に代入: $\cancel{v} + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v^2-1}{v} = \cancel{v} - \dfrac{1}{v}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1}{v}$ $\therefore v\,dv = -\dfrac{dx}{x}$

$\therefore \dfrac{1}{2}v^2 = -\log x + c$ $\therefore v^2 = -2\log x + 2c$ $\therefore \dfrac{y^2}{x^2} = -2\log x + 2c$ $\therefore \dfrac{y^2}{x^2} = -2\log x + c$

$\therefore y^2 = x^2(-2\log x + c)$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{y-x} = \dfrac{1+y/x}{y/x-1}$. $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと $y = xv$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$. これらを

与式に代入. $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v+1}{v-1}$ $\therefore x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v+1}{v-1} - v = \dfrac{v+1-v^2+v}{v-1} = -\dfrac{v^2-2v-1}{v-1}$

$\therefore \dfrac{v-1}{v^2-2v-1}dv = -\dfrac{dx}{x}$ $\therefore \dfrac{1}{2}\log(v^2-2v+1) = -\log x + c$ $\therefore \log(v^2-2v-1) = \log\dfrac{e^{2c}}{x^2}$

$\therefore v^2-2v-1 = \dfrac{e^{2c}}{x^2}$ $\therefore y^2-2xy-x^2 = e^{2c}$ $\therefore x^2+2xy-y^2 = c$

(4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$. $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと. $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$. これらを与式に代入:

$\cancel{v} + x\dfrac{dv}{dx} = \cancel{v} + \tan v$ $\therefore \dfrac{\cos v}{\sin v}dv = \dfrac{dx}{x}$ $\therefore \log\sin v = \log x + c = \log e^c\cdot x$

$\therefore \sin v = e^c\cdot x$ $\therefore \sin\dfrac{y}{x} = cx$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{y}{x} + 1$. $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$. これらを与式に代入.

$v+x\frac{dv}{dx}=v^2+v+1 \quad \therefore \frac{dv}{v^2+1}=\frac{dx}{x} \quad \therefore \tan^{-1}v=\log x+c \quad \therefore v=\tan(\log x+c)$

$\therefore y=x\tan(\log x+c)$

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. $v=\frac{y}{x}$とおくと $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. これらを与式に代入:

$\cancel{v}+x\frac{dv}{dx}=\cancel{v}+\sqrt{1+v^2} \quad \therefore \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{dx}{x} \quad \therefore \log\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)=\log x+c$

$\therefore v+\sqrt{v^2+1}=e^c\cdot x \quad \therefore \frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=cx \quad \therefore y+\sqrt{x^2+y^2}=cx^2$

$\boxed{2}$ (1) 2直線 $2x-y-1=0$, $x-2y+3=0$ の交点は $(x,y)=\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$. よって, $p=x-\frac{5}{3}$, $q=y-\frac{7}{3}$.

とおく. このとき $\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}$ なので 与式は $\frac{dq}{dp}=\frac{2p-q}{p-2q}=\frac{2-\frac{q}{p}}{1-2\left(\frac{q}{p}\right)}$. $v=\frac{q}{p}$とおくと

$\frac{dq}{dp}=v+p\frac{dv}{dp}$ これらを代入すると $v+p\frac{dv}{dp}=\frac{2-v}{1-2v} \quad \therefore \frac{2v-1}{2v^2-2v+2}dv=-\frac{dp}{p}$

$\therefore \frac{1}{2}\log\left(2v^2-2v+2\right)=-\log p+c \quad \therefore \log\left(2v^2-2v+2\right)=\log\frac{e^{2c}}{p^2}$

$\therefore v^2-v+1=\frac{c}{p^2} \quad \therefore p^2-pq+q^2=c \quad \therefore \left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{7}{3}\right)+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=c$

(2) 2直線 $6x-2y-3=0$, $2x+2y-1=0$ の交点は $(x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)$. よって

$p=x-\frac{1}{2}$, $q=y$ とおく. このとき $\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dp}$ なので. 与式は $\frac{dq}{dp}=\frac{6p-2q}{2p+2q}=\frac{3p-q}{p+q}$

$=\frac{3-q/p}{1+q/p}$. $v=\frac{q}{p}$とおくと $\frac{dq}{dp}=v+p\frac{dv}{dp}$. これらを代入:

$v+p\frac{dv}{dp}=\frac{3-v}{1+v} \quad \therefore \frac{v+1}{v^2+2v-3}dv=-\frac{dp}{p} \quad \therefore \frac{1}{2}\log\left(v^2+2v-3\right)=-\log p+c$

$\therefore \log\left(v^2+2v-3\right)=\log\frac{e^{2c}}{p^2} \quad \therefore v^2+2v-3=\frac{c}{p^2} \quad \therefore q^2+2pq-3p^2=c$

$\therefore y^2+2y\left(x-\frac{1}{2}\right)-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=c$

$\boxed{3}$ $x^2+y^2=cx$ $\therefore 2x+2yy'=c$ $\therefore x^2+y^2=x(2x+2yy')$

$\therefore x^2+y^2=2x^2+2xyy'$ $\therefore 2xyy'=y^2-x^2$. ゆえに. 直交曲線の方程式は

$2xy\left(-\frac{1}{y'}\right)=y^2-x^2$ $\therefore \frac{y'}{2xy}=\frac{1}{x^2-y^2}$ $\therefore y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$v=\frac{y}{x}$ とおくと $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. これらを与式に代入. $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{1-v^2}$

$\therefore x\frac{dv}{dx}=\frac{v^3+v}{1-v^2}$ $\therefore \frac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv=-\frac{dx}{x}$ $\therefore \int\left(\frac{2v}{v^2+1}-\frac{1}{v}\right)dv=-\log x+c$

$\therefore \log(v^2+1)-\log v=-\log x+c$ $\therefore x\left(\frac{v^2+1}{v}\right)=e^c$ $\therefore x^2+y^2=e^c\cdot y$

$\therefore x^2+y^2=cy$. 初期条件 $x=1, y=1$ より. $1^2+1^2=c\cdot 1$ $\therefore c=2$ $\therefore x^2+y^2=2y$

問題1.2.3

1 (1) ① $y'+2xy=0$ を解く: $\frac{dy}{dx}=-2xy$ ∴ $\frac{dy}{y}=-2x\,dx$ ∴ $\log y=-x^2+c$

∴ $y=e^c\cdot e^{-x^2}$ ∴ $y=ce^{-x^2}$

② $y=ve^{-x^2}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{dv}{dx}e^{-x^2}-2xve^{-x^2}$. これらを与式に代入:

$e^{-x^2}\frac{dv}{dx}-\cancel{2xve^{-x^2}}+\cancel{2xve^{-x^2}}=x$ ∴ $\frac{dv}{dx}=xe^{x^2}$ ∴ $v=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

∴ $y=e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{x^2}+c\right)=ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$

(2) ① $xy'+y=0$ を解く: $x\frac{dy}{dx}=-y$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ ∴ $\log y=-\log x+c=\log\frac{e^c}{x}$

∴ $y=\frac{e^c}{x}$ ∴ $y=\frac{c}{x}$

② $y=\frac{v}{x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x-v}{x^2}$. これらを与式に代入:

$x\cdot\frac{xv'-v}{x^2}+\frac{v}{x}=\sin x$ ∴ $v'-\cancel{\frac{v}{x}}+\cancel{\frac{v}{x}}=\sin x$ ∴ $v=-\cos x+c$

∴ $y=\frac{c-\cos x}{x}$

(3) ① $xy'+4y=0$ を解く: $x\frac{dy}{dx}=-4y$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{4}{x}dx$ ∴ $\log y=-4\log x+c$

∴ $y=\frac{e^c}{x^4}$ ∴ $y=\frac{c}{x^4}$

② $y=\frac{v}{x^4}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'x^4-4x^3\cdot v}{x^8}=\frac{v'}{x^4}-\frac{4v}{x^5}$.

これらを与式に代入: $x\left(\frac{v'}{x^4}-\cancel{\frac{4v}{x^5}}\right)+\cancel{\frac{4v}{x^4}}=\frac{1}{x^4}$ ∴ $\frac{v'}{x^3}=\frac{1}{x^4}$ ∴ $v'=\frac{1}{x}$

∴ $v=\log x+c$ ∴ $y=\frac{1}{x^4}(\log x+c)$

(4) ① $y'\cos x-y\sin x=0$ を解く: $\cos x\frac{dy}{dx}=y\sin x$ ∴ $\frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{\cos x}dx$

∴ $\log y=-\log\cos x+c$ ∴ $y=\frac{e^c}{\cos x}$ ∴ $y=\frac{c}{\cos x}$

② $y=\frac{v}{\cos x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}$

これらを与式に代入: $\cos x\cdot\frac{v'\cos x+v\sin x}{\cos^2 x}-\sin x\cdot\frac{v}{\cos x}=\sin 2x$

$\therefore v' + \cancel{\frac{\sin x}{\cos x}} v - \frac{\sin x}{\cos x} v = \sin 2x \quad \therefore v = -\frac{\cos 2x}{2} + c$

$\therefore y = \frac{1}{\cos x}\left(c - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

(5) ① $xy' - (x+1)y = 0$ を解く $x\frac{dy}{dx} = (x+1)y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \log y = x + \log x + c \quad \therefore y = e^c \cdot xe^x \quad \therefore y = c \cdot xe^x$

② $y = v \cdot xe^x$ が与式を満たすようにvを定める $y' = v' \cdot xe^x + v(e^x + xe^x)$.

これらを与式に代入 $x(xe^x v' + e^x \cdot v + xe^x v) - (x+1)xe^x v = x^2$

$\therefore x^2 e^x v' + \cancel{xe^x v} + \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{x^2 e^x v} - \cancel{xe^x v} = x^2 \quad \therefore v' = e^{-x}$

$\therefore v = -e^{-x} + c \quad \therefore y = xe^x(-e^{-x} + c) = cxe^x - x \quad \therefore y = x(ce^x - 1)$

(6) ① $xy' - 2y = 0$ を解く $x\frac{dy}{dx} = 2y \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \quad \therefore \log y = 2\log x + c$

$\therefore y = e^c \cdot x^2 \quad \therefore y = cx^2$

② $y = v \cdot x^2$ が与式を満たすようにvを定める $y' = v' \cdot x^2 + 2vx$ これらを与式に代入

$x(v'x^2 + \cancel{2vx}) - \cancel{2vx^2} = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore x^3 v' = x^4 e^{-x^2} \quad \therefore v' = xe^{-x^2}$

$\therefore v = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \quad \therefore y = x^2\left(c - \frac{e^{-x^2}}{2}\right) \quad \therefore y = cx^2 - \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$

(7) ① $y' + y\tan x = 0$ を解く $\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \quad \therefore \frac{dy}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot dx$

$\therefore \log y = \log \cos x + c \quad \therefore y = e^c \cdot \cos x \quad \therefore y = c \cdot \cos x$

② $y = v \cdot \cos x$ が与式を満たすようにvを定める $y' = v'\cos x - v\sin x$ これらを与式に

代入 $v'\cos x - \cancel{v\sin x} + \cancel{v\cos x \frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x \quad \therefore v' = 1 \quad \therefore v = x + c$

$\therefore y = (x + c)\cos x$

(8) ① $(x\log x)y'+y=0$ を解く: $(x\log x)\frac{dy}{dx}=-y$ ∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x\log x}$

∴ $\frac{dy}{y}=-\frac{\frac{1}{x}}{\log x}dx$ ∴ $\log y=-\log\log x+c=\log\frac{e^c}{\log x}$ ∴ $y=\frac{e^c}{\log x}$

∴ $y=\frac{c}{\log x}$

② $y=\frac{v}{\log x}$ が与式を満たすように v を定める: $y'=\frac{v'\log x-v\cdot\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$

$=\frac{v'}{\log x}-\frac{v}{x(\log x)^2}$ これらを与式に代入

∴ $(x\log x)\left(\frac{v'}{\log x}-\frac{v}{x(\log x)^2}\right)+\frac{v}{\log x}=\log x$

∴ $x\cdot v'-\cancel{\frac{v}{\log x}}+\cancel{\frac{v}{\log x}}=\log x$ ∴ $v'=\frac{\log x}{x}$ ∴ $v=\frac{1}{2}(\log x)^2+c$

∴ $y=\frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{2}(\log x)^2+c\right)$ ∴ $y=\frac{c}{\log x}+\frac{1}{2}\log x$

$\boxed{2}$ (1) ① $z=y^{-5}$ とおくと $z'=-5y^{-6}\cdot y'$ ∴ $y'=-\frac{1}{5}y^6\cdot z'$ これを与式に代入:

$-\frac{x}{5}y^6\cdot z'+y=x^3y^6$ ∴ $-\frac{x}{5}z'+y^{-5}=x^3$ ∴ $-\frac{x}{5}z'+z=x^3$

∴ $z'-\frac{5}{x}z=-5x^2$ ...(*)

② $z'-\frac{5}{x}z=0$ を解く: $\frac{dz}{dx}=\frac{5z}{x}$ ∴ $\frac{dz}{z}=\frac{5}{x}dx$ ∴ $\log z=5\log x+c$

∴ $z=e^c x^5$ ∴ $z=cx^5$

③ $z=v\cdot x^5$ が(*)を満たすように v を定める: $z'=v'x^5+5vx^4$ これらを(*)に代入:

$x^5v'+\cancel{5x^4v}-\frac{5}{\cancel{x}}\cdot \cancel{vx^5}=-5x^2$ ∴ $v'=-5x^{-3}$ ∴ $v=\frac{-5}{-2}x^{-2}+c$

∴ $v=\frac{5}{2}x^{-2}+c$

以上より $z=x^5\left(\frac{5}{2}x^{-2}+c\right)=cx^5+\frac{5}{2}x^3$ ∴ $\frac{1}{y^5}=cx^5+\frac{5}{2}x^3$

(2) ① $z = y^{1-\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}$ とおくと $z' = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \cdot y'$ ∴ $y' = -2y^{\frac{3}{2}} z'$. これを与式に代入:

$-2y^{\frac{3}{2}}z' + 2y = 2x y^{\frac{3}{2}}$ ∴ $-2z' + 2y^{-\frac{1}{2}} = 2x$ ∴ $-2z' + 2z = 2x$

∴ $z' - z = -x$ …(*)

② $z' - z = 0$ を解く $\frac{dz}{dx} = z$ ∴ $\frac{dz}{z} = dx$ ∴ $\log z = x + c$ ∴ $z = e^{c} e^{x}$ ∴ $z = Ce^{x}$

③ $z = v \cdot e^{x}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{x} + v \cdot e^{x}$ これを(*)に代入:

$v'e^{x} + \cancel{ve^{x}} - \cancel{ve^{x}} = -x$ ∴ $v' = -xe^{-x}$

∴ $v = -\int xe^{-x}dx + c = -\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) + c = xe^{-x} + e^{-x} + c$

以上より $z = e^{x}\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right) = ce^{x} + x + 1$ ∴ $\frac{1}{\sqrt{y}} = ce^{x} + x + 1$

(3) ① $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ とおくと $z' = -\frac{1}{y^2} y'$ ∴ $y' = -y^2 z'$ これを与式に代入:

$-y^2 z' - xy = xe^{-x^2} \cdot y^2$ ∴ $z' + x \cdot y^{-1} = -xe^{-x^2}$ ∴ $z' + xz = -xe^{-x^2}$ …(*)

② $z' + xz = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -xz$ ∴ $\frac{dz}{z} = -x\,dx$ ∴ $\log z = -\frac{x^2}{2} + c$

∴ $z = e^{c} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∴ $z = ce^{-\frac{x^2}{2}}$

③ $z = v \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot v$ これを(*)

に代入: $v'e^{-\frac{x^2}{2}} - \cancel{xe^{-\frac{x^2}{2}} \cdot v} + \cancel{xv \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}} = -xe^{-x^2}$ ∴ $v' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$v = e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

以上より $z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$ ∴ $\frac{1}{y} = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x^2}$

(4) ① $z = y^{1-3} = y^{-2}$ とおくと $z' = -2y^{-3}\cdot y'$ ∴ $y' = -\frac{y^3}{2}z'$ これを与式に代入:

$x\left(-\frac{y^3}{2}z'\right) + y = y^3 \log x$ ∴ $-\frac{x}{2}z' + y^{-2} = \log x$ ∴ $-\frac{x}{2}z' + z = \log x$

∴ $z' - \frac{2}{x}z = -\frac{2\log x}{x}$ ……(*)

② $z' - \frac{2}{x}z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z$ ∴ $\frac{dz}{z} = \frac{2}{x}dx$ ∴ $\log z = 2\log x + c = \log e^c\cdot x^2$

∴ $z = e^c\cdot x^2$ ∴ $z = Cx^2$

③ $z = v x^2$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'x^2 + 2xv$ これらを(*)に代入:

$x^2 v' + \cancel{2xv} - \cancel{\frac{2}{x}\cdot v x^2} = -\frac{2\log x}{x}$ ∴ $v' = -\frac{2\log x}{x^3}$

∴ $v = -\int \frac{2\log x}{x^3}dx = -2\int (\log x)\cdot x^{-3}dx + c$

$= -2\left\{(\log x)\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) - \int \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx\right\} + c$

$= \frac{\log x}{x^2} - \int x^{-3}dx + c = \frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2}x^{-2} + c$

以上より $z = x^2\left(\frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + c\right) = Cx^2 + \log x + \frac{1}{2}$ ∴ $\frac{1}{y^2} = Cx^2 + \log x + \frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ (1) $z = \sin y$ とおくと $\frac{dz}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx}$ これらを与式に代入:

$\frac{dz}{dx} + xz = 2x$ …(*) ← 線形

① $\frac{dz}{dx} + xz = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -xz$ ∴ $\frac{dz}{z} = -x\,dx$ ∴ $\log z = -\frac{x^2}{2} + c$

∴ $z = e^c\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ ∴ $z = C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

② $z = v e^{-\frac{x^2}{2}}$ が(*)を満たすように v を定める: $\frac{dz}{dx} = v'e^{-\frac{x^2}{2}} + v\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$

これらを(*)に代入: $e^{-\frac{x^2}{2}} v' - \cancel{x e^{-\frac{x^2}{2}} v} + \cancel{x v e^{-\frac{x^2}{2}}} = 2x$ ∴ $v' = 2x e^{\frac{x^2}{2}}$

∴ $v = 2e^{\frac{x^2}{2}} + c$

以上より. $z = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(c + 2e^{\frac{x^2}{2}}\right)$ ∴ $z = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$ ∴ $\sin y = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 2$

(2) $z = y^2$ とおくと $z' = 2y \cdot y'$ これらを与式に代入:

$z' - \frac{1}{x^2} z = e^{\frac{x^2-1}{x}}$ …(*) ← 線形

① $z' - \frac{1}{x^2} z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x^2}$ ∴ $\frac{dz}{z} = x^{-2}dx$ ∴ $\log z = -\frac{1}{x} + c$

∴ $z = e^c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ ∴ $z = ce^{-\frac{1}{x}}$

② $z = v \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-\frac{1}{x}} + v\left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\right)$

これらを(*)に代入: $v'e^{-\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} v} - \cancel{\frac{1}{x^2} v e^{-\frac{1}{x}}} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$

∴ $v' = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{x - \frac{1}{x}} = e^x$ ∴ $v = e^x + c$

以上より. $z = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$ ∴ $y^2 = e^{-\frac{1}{x}}(c + e^x)$

(3) $y^2 = xz$ とおくと $2yy' = z + x \cdot z'$ これらを与式に代入:

$x(z + x \cdot z') + (x-1)xz = x^2 e^x$ ∴ $\cancel{xz} + x^2 z' + x^2 z - \cancel{xz} = x^2 e^x$

∴ $x^2 z' + x^2 z = x^2 e^x$ ∴ $z' + z = e^x$ …(*) ← 線形

① $z' + z = 0$ を解く: $\frac{dz}{dx} = -z$ ∴ $\frac{dz}{z} = -dx$ ∴ $\log z = -x + c$ ∴ $z = e^c \cdot e^{-x}$

∴ $z = ce^{-x}$

② $z = v \cdot e^{-x}$ が(*)を満たすように v を定める: $z' = v'e^{-x} - ve^{-x}$、これらを(*)に代入:

$v'e^{-x} - \cancel{ve^{-x}} + \cancel{ve^{-x}} = e^x$ ∴ $v' = e^{2x}$ ∴ $v = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

以上より $z=e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)=ce^{-x}+\frac{1}{2}e^{x}$ $\therefore y^2=xz=cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

$\therefore y^2=cxe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{x}$

4 与式の任意の解を y_1 とし、$z=y-y_1$ とおく。与式に代入すると

$\frac{dz}{dx}+\frac{dy_1}{dx}+P(x)(z+y_1)=Q(x)$ $\therefore \frac{dz}{dx}+P(x)z+\left\{\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1-Q(x)\right\}=0$

$\therefore \frac{dz}{dx}+P(x)z=0$. この変数分離形の方程式を解くと $z=ce^{-\int P(x)dx}$

$\therefore y=ce^{-\int P(x)dx}+y_1$

また、上の公式より $y=ce^{-\int\frac{dx}{x}}+x^2=ce^{-\log x}+x^2=\frac{c}{x}+x^2$ $\therefore y=\frac{c}{x}+x^2$

5 初期条件を満たす解は、解の公式より、$y(x)=e^{-x}\int_0^x e^{t}r(t)dt$ となる。仮定より

すべての $t\geqq 0$ に対して $|r(t)|\leqq M$ なので、すべての $x\geqq 0$ に対して

$|y(x)|\leqq e^{-x}\int_0^x e^{t}|r(t)|dt\leqq e^{-x}\int_0^x Me^{t}dt=Me^{-x}\left[e^{t}\right]_0^x$

$=Me^{-x}(e^{x}-1)\leqq Me^{-x}\cdot e^{x}=M$.

問題1.2.4

1 (1) ① 完全性の確認：$P=\cos x+2xy$, $Q=x^2$とおく $P_y=2x$, $Q_x=2x$
$\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $U_x=\cos x+2xy$となるUを求める：$U=\int(\cos x+2xy)dx+w(y)=\sin x+x^2y+w(y)$

② $U_y=x^2$となるように$w(y)$を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=x^2$ $\therefore \frac{dw}{dy}=0$ $\therefore w(y)=0$

以上より $U=\sin x+x^2y$ $\therefore \sin x+x^2y=c$

(2) ① 完全性の確認：$P=2x+e^y$, $Q=xe^y$とおく $P_y=e^y$, $Q_x=e^y$ $\therefore P_y=Q_x$
∴完全

① $U_x=2x+e^y$となるUを求める：$U=\int(2x+e^y)dx+w(y)$ $\therefore U=x^2+xe^y+w(y)$

② $U_y=xe^y$となるように$w(y)$を定める：$xe^y+\frac{dw}{dy}=xe^y$ $\therefore \frac{dw}{dy}=0$ $\therefore w(y)=0$

以上より $U=x^2+xe^y$ $\therefore x^2+xe^y=c$

(3) ① 完全性の確認：$P=2xy$, $Q=1+x^2$とおく $P_y=2x$, $Q_x=2x$ $\therefore P_y=Q_x$
∴完全

① $U_x=2xy$となるUを求める：$U=\int 2xy\,dx+w(y)=x^2y+w(y)$

② $U_y=1+x^2$となるように$w(y)$を定める：$x^2+\frac{dw}{dy}=1+x^2$ $\therefore \frac{dw}{dy}=1$ $\therefore w(y)=y$

以上より $U=x^2y+y$ $\therefore x^2y+y=c$

(4) ① 完全性の確認：$P=x^3+2xy+y$, $Q=y^3+x^2+x$とおく $P_y=2x+1$,
$Q_x=2x+1$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $U_x=x^3+2xy+y$となるUを求める：$U=\int(x^3+2xy+y)dx+w(y)$

$\therefore u=\frac{x^4}{4}+x^2y+yx+w(y)$

② $u_y=y^3+x^2+x$ となるように $w(y)$ を定める: $x^2+x+\frac{dw}{dy}=y^3+x^2+x$ $\therefore \frac{dw}{dy}=y^3$

$\therefore w(y)=\frac{y^4}{4}$

以上より. $u=\frac{x^4}{4}+x^2y+xy+\frac{y^4}{4}$ $\therefore \frac{x^4}{4}+x^2y+xy+\frac{y^4}{4}=c$

(5) ⓪完全性の確認: $P=x^3+5xy^2$, $Q=5x^2y+2y^3$ とおく. $P_y=10xy$,

$Q_x=10xy$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $u_x=x^3+5xy^2$ となる u を求める: $u=\int(x^3+5xy^2)dx+w(y)=\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2y^2+w(y)$

② $u_y=5x^2y+2y^3$ となるように $w(y)$ を定める: $\cancel{5x^2y}+\frac{dw}{dy}=\cancel{5x^2y}+2y^3$

$\therefore \frac{dw}{dy}=2y^3$ $\therefore w(y)=\frac{y^4}{2}$

以上より $u=\frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{2}$ $\therefore \frac{x^4}{4}+\frac{5}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{2}=c$

(6) ⓪完全性の確認: $P=y^2+e^x\sin y$, $Q=2xy+e^x\cos y$ とおく $P_y=2y+e^x\cos y$

$Q_x=2y+e^x\cos y$ $\therefore P_y=Q_x$ ∴完全

① $u_x=y^2+e^x\sin y$ となる u を求める: $u=\int(y^2+e^x\sin y)dx+w(y)=xy^2+e^x\sin y+w(y)$

② $u_y=2xy+e^x\cos y$ となるように $w(y)$ を定める: $2xy+e^x\cos y+\frac{dw}{dy}=2xy+e^x\cos y$

$\therefore \frac{dw}{dy}=0$ $\therefore w(y)=0$

以上より. $u=xy^2+e^x\sin y$ $\therefore xy^2+e^x\sin y=c$

$\boxed{2}$ (1) $\frac{1}{\sin y}$ を両辺にかけると $dx+\frac{\cos y}{\sin y}dy=0$

① 完全性の確認：$P=1$, $Q=\frac{\cos y}{\sin y}$ とおくと $P_y=0$, $Q_x=0$ $\therefore P_y=Q_x$ $\therefore$ 完全

① $U_x=1$ となる U を求める：$U=x+w(y)$

② $U_y=\frac{\cos y}{\sin y}$ となるように $w(y)$ を定める：$\frac{dw}{dy}=\frac{\cos y}{\sin y}$ $\therefore w(y)=\log \sin y$

以上より $U=x+\log \sin y=\log(e^x \sin y)$ $\therefore \log(e^x\sin y)=c$ $\therefore e^x \sin y=e^c$

$\therefore e^x\sin y=c$

(2) $\frac{1}{x^2}$ を両辺にかけると $\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+x\,dy=0$

① 完全性の確認：$P=\frac{2}{x}+y$, $Q=x$ とおく. $P_y=1$, $Q_x=1$ $\therefore P_y=Q_x$ $\therefore$ 完全

① $U_x=\frac{2}{x}+y$ となる U を求める：$U=\int\left(\frac{2}{x}+y\right)dx+w(y)$ $\therefore U=2\log x+xy+w(y)$

② $U_y=x$ となるように $w(y)$ を定める：$x+\frac{dw}{dy}=x$ $\therefore \frac{dw}{dy}=0$ $\therefore w(y)=0$

以上より $U=2\log x+xy$ $\therefore xy+2\log x=c$

(3) e^y を両辺にかけると $(ye^y+e^y\cos x)dx+(xe^y+xye^y+e^y\sin x)dy=0$

① 完全性の確認：$P=ye^y+e^y\cos x$, $Q=xe^y+xye^y+e^y\sin x$ とおく.

$P_y=e^y+ye^y+e^y\cos x$, $Q_x=e^y+ye^y+e^y\cos x$ $\therefore P_y=Q_x$ $\therefore$ 完全

① $U_x=ye^y+e^y\cos x$ となる U を求める：$U=\int(ye^y+e^y\cos x)dx+w(y)$

$\therefore U=xye^y+e^y\sin x+w(y)$

② $u_y = xe^y + xye^y + e^y\sin x$ となるように $w(y)$ を求める：

$x(e^y + ye^y) + e^y\sin x + \frac{dw}{dy} = xe^y + xye^y + e^y\sin x \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 0 \quad \therefore w(y) = 0$

以上より $u = e^y(xy + \sin x) \quad \therefore e^y(xy + \sin x) = c$

(4) $\frac{1}{x^2+y^2}$ を両辺にかけると $\frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$

① 完全性の確認：$P = \frac{y}{x^2+y^2}$，$Q = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ とおく $P_y = \frac{x^2+y^2-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}$
$= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$Q_x = -\frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\therefore P_y = Q_x \quad \therefore$ 完全

① $u_x = \frac{y}{x^2+y^2}$ となる u を求める：$u = \int \frac{y}{x^2+y^2}dx + w(y) = \tan^{-1}\frac{x}{y} + w(y)$

② $u_y = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$ となるように $w(y)$ を求める：$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) + \frac{dw}{dy} = 1 - \frac{x}{x^2+y^2}$

$\therefore \cancel{\frac{-x}{x^2+y^2}} + \frac{dw}{dy} = 1 - \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} \quad \therefore \frac{dw}{dy} = 1 \quad \therefore w(y) = y$

以上より $u = \tan^{-1}\frac{x}{y} + y \quad \therefore \tan^{-1}\frac{x}{y} + y = c$

(5) $e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ を両辺にかけると $xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dx + (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dy = 0$

① 完全性の確認：$P = xy^3e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$，$Q = (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ とおく

$P_y = 3xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + xy^3\left(-yx^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

$Q_x = 2xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + (x^2y^2-1)\left(-xy^2e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) = (2xy^2 - x^3y^4 + xy^2)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$
$= (3xy^2 - x^3y^4)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

$\therefore P_y = Q_x \quad \therefore$ 完全

① $u_x = xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となる u を求める：

$$u=\int xy^3 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}dx + w(y) = y\left(-e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) + w(y) = -ye^{-\frac{x^2y^2}{2}} + w(y)$$

② $u_y=(x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ となる $w(y)$ を求める：

$$-e^{-\frac{x^2y^2}{2}} - y\left(-yx^2 e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\right) + \frac{dw}{dy} = (x^2y^2-1)e^{-\frac{x^2y^2}{2}} \quad \therefore \frac{dw}{dy}=0 \quad \therefore w(y)=0$$

以上より $u=-ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}$ $\therefore ye^{-\frac{x^2y^2}{2}}=c$

$\boxed{3}$ $\mu=x^my^n$ とおいて与式の両辺にかける

(1) ① 積分因子：$P=2x^{m+1}y^{n+1}$, $Q=x^my^{n+2}-x^{m+2}y^n$ $\therefore P_y=2(n+1)x^my^n$,

$Q_x = mx^{m-1}y^{n+2}-(m+2)x^my^n$ $\begin{cases} m=0 \\ -(m+2)=2(n+1) \end{cases}$ $P_y=Q_x$ とすると $\therefore m=0,\ n=-2$ $\therefore \mu=\frac{1}{y^2}$

よって $\frac{2x}{y}dx + \left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=0$ を解く

② $u_x=\frac{2x}{y}$ となる u を求める・$u=\int \frac{2x}{y}dx + w(y) = \frac{x^2}{y}+w(y)$

③ $u_y = 1-\frac{x^2}{y^2}$ となる $w(y)$ を求める・$-\cancel{\frac{x^2}{y^2}}+\frac{dw}{dy} = 1-\cancel{\frac{x^2}{y^2}}$ $\therefore \frac{dw}{dy}=1$ $\therefore w(y)=y$

以上より $u=\frac{x^2}{y}+y$ $\therefore \frac{x^2}{y}+y=c$

(2) ① 積分因子：$P=x^{m+1}y^{n+1}+x^my^{n+2}$, $Q=x^{m+1}y^{n+1}-x^{m+2}y^n$ とおく

$P_y=(n+1)x^{m+1}y^n+(n+2)x^my^{n+1}$, $Q_x=(m+1)x^my^{n+1}-(m+2)x^{m+1}y^n$

$P_y=Q_x$ とすると $\begin{cases} -(m+2)=n+1 \\ m+1=n+2 \end{cases}$ $\therefore m=-1,\ n=-2$ $\therefore \mu=\frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$ を解く

② $U_x = \frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ となるUを求める: $U=\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)dx + w(y) = \frac{x}{y}+\log x + w(y)$

③ $U_y = \frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める: $-\cancel{\frac{x}{y^2}}+\frac{dw}{dy} = \frac{1}{y}-\cancel{\frac{x}{y^2}}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=\frac{1}{y}$ ∴ $w(y)=\log y$

以上より $U=\frac{x}{y}+\log x+\log y$ ∴ $\frac{x}{y}+\log x+\log y = c$

(3) $P = x^m y^{n+2} - x^{m+1}y^{n+1}$, $Q = x^{m+2}y^n$ とおく. $P_y = (n+2)x^m y^{n+1} - (n+1)x^{m+1}y^n$,

$Q_x = (m+2)x^{m+1}y^n$ $P_y=Q_x$ とすると $\begin{cases} n+2=0 \\ m+2=-(n+1)\end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m=-1 \\ n=-2\end{cases}$ ∴ $\mu=\frac{1}{xy^2}$

よって $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx+\frac{x}{y^2}dy=0$ を解く

① $U_x = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ となるUを求める: $U=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)dx + w(y) = \log x - \frac{x}{y} + w(y)$

② $U_y = \frac{x}{y^2}$ となるようにw(y)を求める: $\frac{x}{y^2}+\frac{dw}{dy}=\frac{x}{y^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $U=\log x-\frac{x}{y}$ ∴ $\log x - \frac{x}{y} = c$

(4) $P = x^{m+2}y^{n+1}+2x^m y^{n+3}$, $Q = x^{m+3}y^n + x^{m+1}y^{n+2}$ とおく

$P_y = (n+1)x^{m+2}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$, $Q_x = (m+3)x^{m+2}y^n + (m+1)x^m y^{n+2}$

$P_y=Q_x$ とすると $\begin{cases} n+1=m+3 \\ 2(n+3)=m+1\end{cases}$ ∴ $\begin{cases} m-n=-2 \\ m-2n=5\end{cases}$ ∴ $m=-9,\ n=-7$ ∴ $\mu=\frac{1}{x^9y^7}$

よって $\left(\frac{1}{x^7y^6}+\frac{2}{x^9y^4}\right)dx+\left(\frac{1}{x^6y^7}+\frac{1}{x^8y^5}\right)dy=0$ を解く

① $U_x = x^{-7}y^{-6}+2x^{-9}y^{-4}$ となるUを求める:

$U=\int\left(x^{-7}y^{-6}+2x^{-9}y^{-4}\right)dx + w(y) = -\frac{1}{6}x^{-6}y^{-6}-\frac{1}{4}x^{-8}y^{-4}+w(y)$

② $U_y = x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}$ となるようにw(y)を求める:

$x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}+\frac{dw}{dy}=x^{-6}y^{-7}+x^{-8}y^{-5}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{1}{6x^6y^6}-\frac{1}{4x^8y^4}$ ∴ $\frac{2}{x^6y^6}+\frac{3}{x^8y^4}=c$

∴ $2x^2+3y^2=cx^8y^6$

(5) $P=x^my^{n+4}+2x^{m+4}y^{n+1}$, $Q=x^{m+5}y^n-2x^{m+1}y^{n+3}$ とおく

$P_y=(n+4)x^my^{n+3}+2(n+1)x^{m+4}y^n$, $Q_x=(m+5)x^{m+4}y^n-2(m+1)x^my^{n+3}$

∴ $\begin{cases} n+4=-2(m+1) \\ 2(n+1)=m+5 \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} 2m+n=-6 \\ m-2n=-3 \end{cases}$ ∴ $m=-3, n=0$ ∴ $\mu=\frac{1}{x^3}$

与式. $\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+\left(x^2-\frac{2y^3}{x^2}\right)dy=0$ を解く

① $u_x=\frac{y^4}{x^3}+2xy$ となるuを求める:

$u=\int\left(\frac{y^4}{x^3}+2xy\right)dx+w(y)=-\frac{1}{2}x^{-2}y^4+x^2y+w(y)$

② $u_y=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ となるように$w(y)$を求める.

$-2x^{-2}y^3+x^2+\frac{dw}{dy}=x^2-\frac{2y^3}{x^2}$ ∴ $\frac{dw}{dy}=0$ ∴ $w(y)=0$

以上より $u=-\frac{y^4}{2x^2}+x^2y$ ∴ $x^2y-\frac{y^4}{2x^2}=c$ ∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=2c$

∴ $2x^2y-\frac{y^4}{x^2}=c$

$\boxed{4}$ (1) $\frac{\partial}{\partial y}\left\{P\cdot e^{-\int q(x)dx}\right\}=P_y\cdot e^{-\int q(x)dx}$

一方, $\frac{\partial}{\partial x}\left\{Q\cdot e^{-\int q(x)dx}\right\}=Q_x e^{-\int q(x)dx}+Q\left(-q(x)e^{-\int q(x)dx}\right)$

$$= e^{-\int g(x)dx}\{Q_x - g(x)Q\} \underset{\uparrow}{=} e^{-\int g(x)dx}\{Q_x - Q_x + P_y\} = P_y \cdot e^{-\int g(x)dx}$$

$$g = \frac{Q_x - P_y}{Q}$$

ゆえに 積分因子である.

(2) $$\frac{\partial}{\partial y}\left\{P\cdot e^{\int \psi(y)dy}\right\} = P_y \cdot e^{\int \psi(y)dy} + P\left(\psi(y)e^{\int \psi(y)dy}\right)$$

$$= e^{\int \psi(y)dy}\left(P_y + \psi(y)P\right) \underset{\uparrow}{=} e^{\int \psi(y)dy}\left(\cancel{P_y} + Q_x - \cancel{P_y}\right) = Q_x e^{\int \psi(y)dy}$$

$$\psi = \frac{Q_x - P_y}{P}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{Q e^{\int \psi(y)dy}\right\}$$ よって 積分因子である

(3) まず $$\frac{\partial}{\partial y} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\cdot 2y$$

$$= -y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

同様に $$\frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} = \frac{\partial}{\partial u} e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\cdot 2x$$

$$= -x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}$$

ゆえに

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = P_y e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + P\left(-y\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(P_y - yP\cdot\theta(u)\right) \quad \cdots\cdots (※)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = Q_x e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du} + Q\left(-x\theta(u)e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\left(Q_x - xQ\cdot\theta(u)\right) \quad \cdots (※※)$$

ここで $\theta(u) = \dfrac{Q_x - P_y}{xQ - yP}$ であるので $xQ\cdot\theta(u) - yP\cdot\theta(u) = Q_x - P_y$

$\therefore P_y - yP\cdot\theta(u) = Q_x - xQ\cdot\theta(u)$ よって (※),(※※)より

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\, e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{-\frac{1}{2}\int \theta(u)du}\right) \quad \therefore 積分因子$$

(4) $\frac{\partial}{\partial y} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

$\frac{\partial}{\partial x} e^{\int \xi(v)dv} = \frac{\partial}{\partial v} e^{\int \xi(v)dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = y\,\xi(v)\, e^{\int \xi(v)dv}$

よって

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = P_y e^{\int \xi(v)dv} + xQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$$
$$= e^{\int \xi(v)dv}\left(P_y + xQ\cdot\xi(v)\right) \quad \cdots (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = Q_x e^{\int \xi(v)dv} + yQ\,\xi(v)\cdot e^{\int \xi(v)dv}$$
$$= e^{\int \xi(v)dv}\left(Q_x + yQ\,\xi(v)\right) \quad \cdots (**)$$

ここで $\frac{Q_x - P_y}{xQ - yP} = \xi(v)$ なので $xQ\xi(v) - yP\cdot\xi(v) = Q_x - P_y$

$\therefore P_y + xQ\cdot\xi(v) = Q_x + yP\cdot\xi(v)$ ゆえに $(*)$, $(**)$ より

$\frac{\partial}{\partial y}\left(P\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q\cdot e^{\int \xi(v)dv}\right)$ ゆえに 積分因子

演習について：

(1) $P = \sin y$, $Q = \cos y$ とおく $P_y = \cos y$, $Q_x = 0$. よって $(Q_x - P_y)/P = -\frac{\cos y}{\sin y} = \psi$

$\int \psi dy = -\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\log \sin y \quad \therefore \mu = e^{-\log \sin y} = \frac{1}{\sin y}$

(2) $P = 2x + x^2 y$, $Q = x^3$ とおく $P_y = x^2$, $Q_x = 3x^2$. よって $(Q_x - P_y)/Q = (3x^2 - x^2)/x^3$
$= \frac{2}{x} = \varphi$.

$\int \varphi dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\log x = \log x^2 \quad \therefore \mu = e^{-\log x^2} = \frac{1}{x^2}$

(3) $P = y + \cos x,\ Q = x + xy + \sin x$ とおく $P_y = 1,\ Q_x = 1 + y + \cos x$

$\therefore (Q_x - P_y)/P = (1 + y + \cos x - 1)/(y + \cos x) = 1 = \psi \quad \therefore \int \psi dy = \int dy = y$

$\therefore \mu = e^y$

(4) $P = y,\ Q = x^2 + y^2 - x$ とおく. $P_y = 1,\ Q_x = 2x - 1 \quad \therefore (Q_x - P_y)/(xQ - yP)$

$= \frac{2x - 1 - 1}{x^3 + xy^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(x-1)}{x(x^2+y^2) - (x^2+y^2)} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+y^2)} = \frac{2}{x^2+y^2}$

$\theta(u) = \frac{2}{u}\ (u = x^2 + y^2)$ とおくと $\int \theta du = 2\log u$

$\therefore \mu = e^{-\frac{1}{2}(2\log u)} = e^{-\log u} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2+y^2}$

(5) $P = xy^3,\ Q = x^2y^2 - 1$ とおく $P_y = 3xy^2,\ Q_x = 2xy^2$

$\therefore Q_x - P_y = 2xy^2 - 3xy^2 = -xy^2,\quad xP - yQ = x^2y^3 - x^2y^3 + y = y$

$\therefore \frac{Q_x - P_y}{xP - yQ} = \frac{-xy^2}{y} = -xy$ ここで $\xi(v) = -v\ (v = xy)$ とおくと

$\int \xi(v) dv = \int -v dv = -\frac{v^2}{2} \quad \therefore \mu = e^{-\frac{v^2}{2}} = e^{-\frac{x^2y^2}{2}}$

問題1.2.5

$\boxed{1}$ (1) $y = x + px$. 両辺をxで微分すると. $\cancel{p} = 1 + x\dfrac{dp}{dx} + \cancel{p}$ $\therefore x\dfrac{dp}{dx} = -1$

$\therefore \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{1}{x}$ $\therefore p = -\log x + c$. これを与式に代入して. $x(-\log x + c) = y - x$

$\therefore y = x(1 + c - \log x)$

(2) $xy = x + p$ $\therefore y = 1 + \dfrac{p}{x}$. 両辺を$x$で微分: $p = \dfrac{\frac{dp}{dx}\cdot x - p}{x^2}$

$\therefore x^2 p = x\dfrac{dp}{dx} - p$ $\therefore x\dfrac{dp}{dx} = (x^2+1)p$ $\therefore \dfrac{dp}{p} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)dx$

$\therefore \log p = \dfrac{x^2}{2} + \log x + c$ $\therefore p = e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c}$. これを与式に代入:

$e^{\frac{x^2}{2} + \log x + c} = xy - x$ $\therefore \dfrac{x^2}{2} + \cancel{\log x} + c = \cancel{\log x} + \log(y-1)$ $\therefore y - 1 = e^{\frac{x^2}{2} + c}$.

$\therefore y = e^c e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ $\therefore y = c e^{\frac{x^2}{2}} + 1$

(3) $y = \dfrac{1}{3}(p^3 + 3p^2)$. 両辺を$x$で微分. $p = \dfrac{1}{3}\left(3p^2\dfrac{dp}{dx} + 6p\dfrac{dp}{dx}\right)$

$\therefore p = (p^2 + 2p)\dfrac{dp}{dx}$ $\therefore (p+2)\dfrac{dp}{dx} = 1$ $\therefore \dfrac{1}{2}(p+2)^2 = x + c$ $\therefore x = \dfrac{1}{2}(p+2)^2 - c$.

pを媒介変数tで置き換えると $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(t+2)^2 - c \\ y = \dfrac{1}{3}(t^3 + 3t^2) \end{cases}$

(4) $3xp = y - y^2p^2$ $\therefore x = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y}{p} - py^2\right)$. 両辺を$y$で微分:

$\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} - y^2\dfrac{dp}{dy} - p(2y)\right)$ $\therefore \dfrac{y\cancel{(1+yp^2)}}{p}\dfrac{dp}{dy} = -2\cancel{(1+yp^2)}$

$\therefore \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{2}{y}dy$ $\therefore \log p = -2\log y + c$ $\therefore p = \dfrac{e^c}{y^2}$ $\therefore p = \dfrac{c}{y^2}$.

これを与式に代入して. pを消去すると. $x = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y^3}{c} - c\right)$ $\therefore y^3 = c(3x + c)$

(5) $y = xp + x\sqrt{1+p^2}$. 両辺をxで微分: $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + \sqrt{1+p^2} + x\cdot\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\dfrac{dp}{dx}$

$$\therefore \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}\,dp = -\frac{1}{x}dx \quad \therefore \int\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{1+p^2} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right\}dp = -\log x + c$$

$$\therefore \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\log x + c = \log\frac{e^c}{x}$$

$$\therefore x = \frac{e^c}{\sqrt{1+p^2}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)} \quad \therefore x = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)} \quad (e^c \to c)$$

これを与式に代入:

$$y = \cancel{\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}\cdot\frac{c}{\sqrt{1+p^2}\,\cancel{\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)}} = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}.$$

pを媒介変数tで置き換えると
$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)} \\ y = \dfrac{c}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

さらに、上式からtを消去すると. $x^2+y^2 = 2cx$

(6) $e^{2y} = \dfrac{1-p}{p^2}e^{4x}$. 両辺の対数をとると $2y = \log(1-p) - 2\log p + 4x$

$$\therefore y = \frac{1}{2}\log(1-p) - \log p + 2x \cdots ①$$

上式の両辺をxで微分: $p = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-1}{1-p}\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dx} + 2$

$$\therefore \frac{-\cancel{(p-2)}}{p(p-1)}\frac{dp}{dx} = 2\cancel{(p-2)} \quad \therefore \frac{dp}{p(p-1)} = -2dx.$$

$$\therefore \int\left\{\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right\}dp = -2x + c \quad \therefore \log(p-1) - \log p = -2x + c$$

$$\therefore \log\frac{p}{p-1} = 2x - c \quad \therefore \frac{p}{p-1} = c_1e^{2x} \ (e^c \to c_1) \quad \therefore p = c_1e^{2x}(p-1)$$

$$\therefore p = \frac{c_1e^{2x}}{c_1e^{2x}-1}.$$ これを①に代入する.

$$2y = \log\left(1 - \frac{c_1 e^{2x}}{c_1 e^{2x}-1}\right) - 2\log\frac{c_1 e^{2x}}{c_1 e^{2x}-1} + 4x$$

$$= \log\frac{1-c_1e^{2x}}{(c_1e^{2x})^2} + 4x = \log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2 e^{4x}} + \log e^{4x} = \log\frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}$$

$\therefore e^{2y} = \frac{1-c_1e^{2x}}{c_1^2}$ $\quad\therefore e^{2y} = \frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_1}e^{2x}$

$\boxed{2}$ (1) $p^2+5yp+6y^2 = (p+2y)(p+3y)$. $p+2y=0$ より. $\frac{dy}{dx} = -2y$ $\therefore \frac{dy}{y} = -2dx$

$\therefore \log y = -2x + c_1$ $\therefore y = e^{c_1}e^{-2x}$ $\therefore y = c_1 e^{-2x}$. 一方. $p+3y=0$ より. $\frac{dy}{dx}=-3y$

$\therefore \frac{dy}{y} = -3dx$ $\therefore \log y = -3x + c_2$ $\therefore y = e^{c_2}\cdot e^{-3x}$ $\therefore y = c_2e^{-3x}$. 以上より.

$(y-ce^{-2x})(y-ce^{-3x})=0$

(2) $x^2p^2+3xyp+2y^2 = (xp+2y)(xp+y)$ $\quad xp+2y=0$ より. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$

$\therefore \frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx$ $\therefore \log y = -2\log x + c_1$ $\therefore y=\frac{e^{c_1}}{x^2}$ $\therefore y = \frac{c_1}{x^2}$

一方. $xp+y=0$ より $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $\therefore \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\therefore \log y = -\log x + c_2$ $\therefore y = \frac{e^{c_2}}{x}$

$\therefore y=\frac{c_2}{x}$. 以上より. $(y-\frac{c}{x^2})(y-\frac{c}{x})=0$

(3) $x^2p^2 + xy(1+y)p + y^3 = (xp+y)(xp+y^2)$. $xp+y=0$ より. $y=\frac{c_1}{x}$ ((2)の解を見よ). $xp+y^2=0$ より. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x}$ $\therefore -\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}$ $\therefore \frac{1}{y} = \log x + c_2$

$\therefore y = \frac{1}{\log x + c_2}$. 以上より. $(y-\frac{c}{x})(y-\frac{1}{\log x + c})=0$

(4) $p(p+y) = x(x+y)$ $\therefore p^2+py-x^2-xy=0$ $\therefore (p-x)(p+x)+y(p-x)=0$

$\therefore (p-x)(p+x+y)=0$　$p-x=0$ より. $\frac{dy}{dx}=x$ $\therefore y=\frac{x^2}{2}+C_1$.

一方. $p+x+y=0$ より. $y'+y=-x$ ← 1階線形 (*)

① $y'+y=0$ を解く: $\frac{dy}{dx}=-y$ $\therefore \frac{dy}{y}=-dx$ $\therefore \log y=-x+C$ $\therefore y=e^{C}\cdot e^{-x}$

$\therefore y=C_2 e^{-x}$

② $y=v\cdot e^{-x}$ が (*) を満たすように v を定める: $y'=v'e^{-x}+v(-e^{-x})$. これを (*) に代入:

$v'e^{-x}-\cancel{ve^{-x}}+\cancel{ve^{-x}}=-x$ $\therefore v'=-xe^{x}$ $\therefore v=-\int xe^{x}dx+C_2$

$\therefore v=-\left(xe^{x}-\int e^{x}dx\right)+C_2=-xe^{x}+e^{x}+C_2$

$\therefore y=e^{-x}\left(-xe^{x}+e^{x}+C_2\right)=-x+1+C_2e^{-x}$

以上より. $\left(y-\frac{x^2}{2}-c\right)\left(y-1+x-ce^{-x}\right)=0$

$\boxed{3}$ (a) 与式の両辺を x で微分すると $p=p+x\frac{dp}{dx}+f'(p)\frac{dp}{dx}$. ゆえに、

$(x+f'(p))\frac{dp}{dx}=0$ $\therefore x+f'(p)=0$ 又は $\frac{dp}{dx}=0$. 後者. $p=c$ (c は任意定数).

これを与式に代入して得られる式 $y=cx+f(c)$ は任意定数を1つ含む与式の解に

なっているので一般解である.

(b) $p=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{-f'(t)-tf''(t)+f'(t)}{-f''(t)}=t$. よって. $x=-f'(p)$,

$y=-pf'(p)+f(p)$. ゆえに $y=xp+f(p)$ となるので, 与式の解である. また $t=p=\frac{dy}{dx}$

とおくと. この解のパラメータ表示は $\begin{cases} x=-f'(t) \\ y=-tf'(t)+f(t) \end{cases}$ となる. t は定数ではないので.

この解は直線ではない. よって (a) の一般解には含まれない. ゆえに 特異解である.

(1) 一般解は $y=Cx-\log C$． 特異解：$f(t)=-\log t$ とおくと $f'(t)=-\frac{1}{t}$．よって

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t} \\ y=1-\log t=1+\log\frac{1}{t} \end{cases} \quad \therefore y=1+\log x$$

(2) 一般解は $y=Cx+\sqrt{1+C^2}$． 特異解：$f(t)=\sqrt{1+t^2}$ とおくと $f'(t)=2t\left(\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$

$=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，よって

$$\begin{cases} x=-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y=-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}+\sqrt{1+t^2}=\frac{-t^2+1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

ここで

$$1-x^2=1-\frac{t^2}{1+t^2}=\frac{1+t^2-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2} \quad \therefore \sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$\therefore y=\sqrt{1-x^2}$

(3) 一般解は $y=Cx+C^2$． 特異解：$f(t)=t^2$ とおくと $f'(t)=2t$．よって

$$\begin{cases} x=-2t \\ y=-2t^2+t^2 \end{cases} \quad \therefore y=-t^2=-\frac{1}{4}(-2t)^2=-\frac{1}{4}x^2 \quad \therefore y=-\frac{x^2}{4}$$

(4) 一般解は $y=Cx+\frac{1}{C}$． 特異解：$f(t)=\frac{1}{t}$ とおくと $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$．ゆえに

$$\begin{cases} x=\frac{1}{t^2} \\ y=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}=\frac{2}{t} \end{cases} \quad \therefore y^2=\frac{4}{t^2}=4x \quad \therefore y^2=4x$$

問題1.2.6

$\boxed{1}$ (1) $y''' = \frac{1}{x}$ $\therefore y'' = \log x + c_1$, $y' = x\log x - x + c_1 x + c_2$

$y = \int x \log x\,dx - \frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$.

ここで $\int x\log x\,dx = x(x\log x - x) - \int (x\log x - x)dx = x^2\log x - x^2 - \int x\log x\,dx + \frac{x^2}{2}$

$\therefore 2\int x\log x\,dx = x^2\log x - \frac{x^2}{2}$ $\therefore \int x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$

ゆえに $y = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{3}{4}x^2 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ $\left(\frac{c_1}{2} \to c_1\right)$.

(2) $p = y'$ とおくと $y'' = \frac{dp}{dx}$ よって 与式は $\frac{dp}{dx} + p = 2e^{x}$.

まず $\frac{dp}{dx} + p = 0$ を解く. $\frac{dp}{dx} = -p$ $\therefore \frac{dp}{p} = -dx$ $\therefore \log p = -x + c = \log e^{c}\cdot e^{-x}$

$\therefore p = e^{c}\cdot e^{-x}$ $\therefore p = c\,e^{-x}$. ゆえに、$p = v\,e^{-x}$ が与式を満たすように v を定める.

$\frac{dp}{dx} = -e^{-x}\cdot v + e^{-x}\frac{dv}{dx}$ これらを与式に代入: $-e^{-x}\cdot v + e^{-x}\frac{dv}{dx} + v e^{-x} = 2e^{x}$

$\therefore \frac{dv}{dx} = 2e^{2x}$ $\therefore v = 2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + c_1 = e^{2x} + c_1$ $\quad p = e^{-x}(e^{2x} + c_1)$

$\therefore y' = e^{x} + c_1 e^{-x}$ $\therefore y = e^{x} - c_1 e^{-x} + c_2$ $\therefore y = c_1 e^{-x} + c_2 + e^{x}$

(3) $p = y'$ とおいて. y を独立変数, p を y の関数と考える.

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy}$ これらを与式に代入: $yp\cdot\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$

$\therefore yp\frac{dp}{dy} = -(p^2+1)$ $\therefore \frac{p}{p^2+1}dp = -\frac{dy}{y}$ $\therefore \frac{1}{2}\int\frac{2p}{p^2+1}dp = -\log y + c$

$\therefore \frac{1}{2}\log(p^2+1) = -\log y + c$ $\therefore \log(p^2+1) = -2\log y + 2c = \log\frac{e^{2c}}{y^2}$

$\therefore p^2 + 1 = \frac{e^{2c}}{y^2}$ $\therefore p^2 = \frac{c_1}{y^2} - 1$ $\therefore p^2 = \frac{c_1 - y^2}{y^2}$ $\therefore p = \pm\frac{\sqrt{c_1 - y^2}}{y}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{c_1 - y^2}}{y}$ $\therefore \frac{y}{\sqrt{c_1 - y^2}}dy = \pm dx$ $\therefore \int\frac{y}{\sqrt{c_1 - y^2}}dy = \pm x + c_2$

$\therefore -\sqrt{c_1 - y^2} = \pm x + c_2$ $\therefore \sqrt{c_1 - y^2} = \mp x + c_2$ $\therefore c_1 - y^2 = x^2 \mp 2c_2x + c_2^2$

$\therefore x^2+y^2=\mp 2c_2x+(c_1+c_2^2)$ $\quad\therefore x^2+y^2=C_1x+C_2$

(4) $p=y'$ とおいて，y を独立変数，p を y の関数と考える．

$y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$ これらを与式に代入 $\quad yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=2p$

$\therefore yp\dfrac{dp}{dy}=p^2+2p\quad \therefore y\dfrac{dp}{dy}=p+2\quad \therefore \dfrac{dp}{p+2}=\dfrac{dy}{y}\quad \therefore \log(p+2)=\log y+c$

$\therefore p+2=e^c\cdot y\quad \therefore \dfrac{dy}{dx}=c_1y-2\quad \therefore \dfrac{dy}{c_1y-2}=dx\quad \therefore \dfrac{1}{c_1}\log(c_1y-2)=x+c_2$

$\therefore \log(c_1y-2)=c_1x+c_1c_2\quad \therefore c_1y-2=e^{c_1x+c_1c_2}\quad \therefore y=\dfrac{e^{c_1c_2}}{c_1}e^{c_1x}+\dfrac{2}{c_1}$

$\therefore y=c_2e^{c_1x}+\dfrac{2}{c_1}$

(5) $p=y''$ とおくと $p\dfrac{dp}{dx}=1\quad \therefore p\,dp=dx\quad \therefore \dfrac{p^2}{2}=x+c\quad \therefore p^2=2x+2c\quad \therefore p^2=2x+c_1$

$\therefore y''=\pm\sqrt{2x+c_1}\quad \therefore y'=\pm\dfrac{1}{3}(2x+c_1)^{\frac{3}{2}}+c_2\quad \therefore y=\pm\dfrac{1}{15}(2x+c_1)^{\frac{5}{2}}+c_2x+c_3$

(6) $p=y''$ とおくと $y'''=\dfrac{dp}{dx}$．これらを与式に代入：$\dfrac{dp}{dx}+2p=0\quad \therefore \dfrac{dp}{dx}=-2p$

$\therefore \dfrac{dp}{p}=-2dx\quad \therefore \log p=-2x+c_1\quad \therefore p=e^{c_1}\cdot e^{-2x}\quad \therefore y''=c_1e^{-2x}$

$\therefore y'=-\dfrac{c_1}{2}e^{-2x}+c_2\quad \therefore y=\dfrac{c_1}{4}e^{-2x}+c_2x+c_3\quad \therefore y=c_1e^{-2x}+c_2x+c_3$

(7) $p=y''$ とおくと $y^{(4)}=\dfrac{d^2p}{dx^2}$．これらを与式に代入：$4\dfrac{d^2p}{dx^2}=p\quad \therefore \dfrac{d^2p}{dx^2}=\dfrac{1}{4}p$

両辺に $2\dfrac{dp}{dx}$ をかけると $2\dfrac{dp}{dx}\cdot\dfrac{d^2p}{dx^2}=\dfrac{1}{2}p\dfrac{dp}{dx}\quad \therefore \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2=\dfrac{p}{2}\dfrac{dp}{dx}$

$\therefore \left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2=\displaystyle\int\dfrac{p}{2}dp=\dfrac{p^2}{4}+c_1\quad \therefore \dfrac{dp}{dx}=\pm\dfrac{\sqrt{p^2+4c_1}}{2}\quad \therefore \dfrac{1}{\sqrt{p^2+4c_1}}\dfrac{dp}{dx}=\pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore \displaystyle\int\dfrac{dp}{\sqrt{p^2+4c_1}}=\pm\dfrac{x}{2}+c_2\quad \therefore \log\left(p+\sqrt{p^2+4c_1}\right)=\pm\dfrac{x}{2}+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}$

$\therefore p+\sqrt{p^2+4c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm\frac{x}{2}}\ \cdots ①$

ここで $(p+\sqrt{p^2+4c_1})(p-\sqrt{p^2+4c_1})=p^2-(p^2+4c_1)=-4c_1$ であるので ①より

$$p-\sqrt{p^2+4c_1}=-\frac{4c_1}{e^{c_2}}e^{\mp\frac{x}{2}}\ \cdots ②$$

①, ②より $2p=e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}-4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$ $\therefore y''=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm\frac{x}{2}}-2c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}$

$\therefore y'=\pm e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 4c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3$

$\therefore y=\pm 2e^{c_2}e^{\pm\frac{x}{2}}\pm 8c_1e^{-c_2}e^{\mp\frac{x}{2}}+c_3x+c_4$ $\therefore y=c_1e^{\frac{x}{2}}+c_2e^{-\frac{x}{2}}+c_3x+c_4$

(8) $p=y''$ とおくと $y^{(4)}=\frac{d^2p}{dx^2}$. よって与式は $\frac{d^2p}{dx^2}=p-1$. 両辺に $2\frac{dp}{dx}$ をかけると

$2\frac{dp}{dx}\frac{d^2p}{dx^2}=2(p-1)\frac{dp}{dx}$ $\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2(p-1)\frac{dp}{dx}$

$\therefore \left(\frac{dp}{dx}\right)^2=2\int(p-1)dp+c_1=(p-1)^2+c_1$ $\therefore \frac{dp}{dx}=\pm\sqrt{(p-1)^2+c_1}$

$\therefore \frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm 1$ $\therefore \int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}=\pm x+c_2$

ここで

$$\int\frac{dp}{\sqrt{(p-1)^2+c_1}}\ \underset{dq=dp}{\overset{q=p-1}{=}}\ \int\frac{dq}{\sqrt{q^2+c_1}}=\log\left(q+\sqrt{q^2+c_1}\right)$$

$$=\log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)$$

$\therefore \log\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)=\pm x+c_2=\log e^{c_2}\cdot e^{\pm x}$

$\therefore p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}=e^{c_2}\cdot e^{\pm x}\ \cdots ①$

ここで

$$\left(p-1+\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)\left(p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1}\right)=(p-1)^2-(p-1)^2-c_1=-c_1$$

$\therefore p-1-\sqrt{(p-1)^2+c_1}=-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}\ \cdots ②$

①,②より. $2(p-1)=e^{c_2}e^{\pm x}-c_1e^{-c_2}e^{\mp x}$

∴ $p=\frac{e^{c_2}}{2}e^{\pm x}-\frac{c_1e^{-c_2}}{2}e^{\mp x}+1$ ∴ $y''=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+1$

∴ $y'=c_1e^{x}-c_2e^{-x}+x+c_3$ ∴ $\underline{y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4}$

$\boxed{2}$ 題意より. $\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=y'$ $(x\geq 0)$. 両辺をxで微分すると $y''=\sqrt{1+(y')^2}$.

よって この方程式を初期条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ のもとで解けば良い.

$p=y'$とおくと $y''=\frac{dp}{dx}$. これらを与式に代入. $\frac{dp}{dx}=\sqrt{p^2+1}$ ∴ $\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=dx$

∴ $\int\frac{dp}{\sqrt{p^2+1}}=x+c_1$ ∴ $\log(p+\sqrt{p^2+1})=x+c_1$ ∴ $p+\sqrt{p^2+1}=e^{c_1}e^{x}$ …①

ここで $(p+\sqrt{p^2+1})(p-\sqrt{p^2+1})=p^2-(p^2+1)=-1$

∴ $p-\sqrt{p^2+1}=-\frac{1}{p+\sqrt{p^2+1}}=-e^{-c_1}e^{-x}$ …②

①,②より. $2p=e^{c_1}e^{x}-e^{-c_1}e^{-x}$ ∴ $y'=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}-\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}$

∴ $y=\frac{e^{c_1}}{2}e^{x}+\frac{e^{-c_1}}{2}e^{-x}+c_2$. $y(0)=1$, $y'(0)=0$より. $\begin{cases}\frac{e^{c_1}}{2}+\frac{e^{-c_1}}{2}+c_2=1 & \cdots③\\ \frac{e^{c_1}}{2}-\frac{e^{-c_1}}{2}=0 & \cdots④\end{cases}$

④より. $e^{c_1}=e^{-c_1}$ ∴ $c_1=-c_1$ ∴ $c_1=0$. よって ③より. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+c_2=1$ ∴ $c_2=0$

ゆえに $\underline{y=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$

問題1.3.1.

[1] (1) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(-2-4x+x^2-x^3)=0$ とおくと

$(c_1+c_2-2c_3)+(c_1+2c_2-4c_3)x+(3c_1+c_3)x^2+(-c_2-c_3)x^3=0$. 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2-2c_3=0 \\ c_1+2c_2-4c_3=0 \\ 3c_1+c_3=0 \\ c_2+c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore c_1=c_2=c_3=0$$

ゆえに. 1次独立

(2) $c_1(1+x+3x^2)+c_2(1+2x-x^3)+c_3(1+3x-3x^2-2x^3)=0$ とおくと

$(c_1+c_2+c_3)+(c_1+2c_2+3c_3)x+(3c_1-3c_3)x^2+(-c_2-2c_3)x^3=0$ 係数を比較して

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+2c_2+3c_3=0 \\ c_1-c_3=0 \\ c_2+2c_3=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} c_1-c_3=0 \\ c_2+2c_3=0 \end{cases}$$

ここで $c_3=t$ とおくと

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$t=1$ とおくと $c_1=c_3=1$, $c_2=-2$. ゆえに. 1次従属.

実際, $1+3x-3x^2-2x^3=-(1+x+3x^2)+2(1+2x-x^3)$

(3) $c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x=0$ とおくと $(c_1+c_2x+c_3x^2)e^x=0$ $\therefore c_1+c_2x+c_3x^2=0$

$x=0$ とおくと $c_1=0$. このとき. $c_2x+c_3x^2=0$. $x=\pm1$ とおくと. $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$.

よって. $c_2=c_3=0$ $\therefore c_1=c_2=c_3=0$ $\therefore$ 1次独立

(4) $c_1+c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$ とおく $x=0$ とおくと $c_1=0$, このとき. $c_2\sin x+c_3\sin^2 x=0$.

$x=\pm\pi/2$ とおくと $c_2+c_3=0$, $-c_2+c_3=0$ $\therefore c_2=c_3=0$ $\therefore c_1=c_2=c_3=0$ $\therefore$ 1次独立

[2] (1) $c_1y_1+c_2y_2=c_1x^3+c_2|x|^3=0$ とおく　$x=\pm1$ のとき．$c_1+c_2=0$，$-c_1+c_2=0$
∴ $c_1=c_2=0$　よって y_1, y_2 は1次独立

(2) $x\geqq0$ のときは．$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x^3 & x^3\\ 3x^2 & 3x^2\end{vmatrix}=3x^5-3x^5=0$

$x<0$ のときは　$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}x^3 & -x^3\\ 3x^2 & -3x^2\end{vmatrix}=-3x^5-(-3x^5)=0$

以上より．すべての x で $W(y_1,y_2)=0$

[3] (1) $y=x^m$ とおくと．$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$．これらを与式に代入：
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+x\cdot mx^{m-1}-2x^m=0$　∴ $(m^2-2)x^m=0$　∴ $m=\pm\sqrt{2}$．よって．$y_1=x^{\sqrt{2}}$，
$y_2=x^{-\sqrt{2}}$ が特殊解．$y_1/y_2=x^{2\sqrt{2}}$ は定数でないので．一般解は $y=c_1x^{\sqrt{2}}+c_2x^{-\sqrt{2}}$

(2) $y=x^m$ とおくと．$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$．これらを与式に代入：
$x^2\cdot m(m-1)x^{m-2}+4x\cdot mx^{m-1}-4x^m=0$　∴ $(m^2+3m-4)x^m=0$　∴ $m^2+3m-4=0$
∴ $(m+4)(m-1)=0$　∴ $m=1,-4$．よって．$y_1=x$，$y_2=x^{-4}$ は特殊解．$y_1/y_2=x^5$ は定数
でないので．一般解は $y=c_1x+c_2/x^4$．

[4] (1) $P=\frac{1}{x}$，$y_1=x^2$．よって．$\int Pdx=\int\frac{dx}{x}=\log x$　∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int\frac{1}{x^4}\cdot e^{-\log x}dx$

$=\int\frac{dx}{x^5}=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}=-\frac{1}{4}x^{-4}$　∴ $y_2=x^2\cdot\left(-\frac{1}{4}x^{-4}\right)=-\frac{1}{4}x^{-2}$

∴ $y=c_1x^2-\frac{c_2}{4}x^{-2}$　∴ $y=c_1x^2+c_2/x^2$　$\left(-\frac{c_2}{4}\to c_2\right)$

(2) $P=-\frac{x+1}{x}=-1-\frac{1}{x}$，$y_1=e^x$．よって．$\int Pdx=-x-\log x$

∴ $\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int Pdx}dx=\int e^{-2x}\cdot e^{x+\log x}dx=\int xe^{-x}dx=x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx$

$=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$　∴ $y_2=e^x\{-(x+1)e^{-x}\}=-(x+1)$．

∴ $y=c_1e^x-c_2(x+1)$　∴ $y=c_1(x+1)+c_2e^x$　$(c_1\to c_2,\ -c_2\to c_1)$

(3) $P=-\frac{5}{x}$, $y_1=x^3$. $\int P\,dx=-5\log x=-\log x^5$ $\therefore e^{-\int P\,dx}=e^{\log x^5}=x^5$

$\therefore y_2=x^3\cdot\int x^{-6}\cdot x^5\,dx=x^3\int\frac{dx}{x}=x^3\cdot\log|x|$ $\therefore y=C_1x^3+C_2x^3\log|x|$

問題1.3.2

$\boxed{1}$ (1) $\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0$ $\therefore \lambda=-2,4$ $\therefore y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}$

(2) $\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$ $\therefore \lambda=3$ (重解) $\therefore y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

(3) $\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)=0$ $\therefore \lambda=-1,0$ $\therefore y=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{-x}$ $\therefore y=C_1+C_2e^{-x}$

(4) $\lambda^2-2\lambda+2=(\lambda-1)^2+1=0$ $\therefore \lambda=1\pm i$ $\therefore y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$

(5) $\lambda^2+3=0$ $\therefore \lambda=\pm\sqrt{3}i$ $\therefore y=e^0\cdot(C_1\sin\sqrt{3}x+C_2\cos\sqrt{3}x)$ $\therefore y=C_1\sin\sqrt{3}x+C_2\cos\sqrt{3}x$

(6) $\lambda^2-4\lambda+6=(\lambda-2)^2+2=0$ $\therefore \lambda=2\pm\sqrt{2}i$ $\therefore y=e^{2x}(C_1\sin\sqrt{2}x+C_2\cos\sqrt{2}x)$

$\boxed{2}$ (1) $u=\log x$ とおくと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{du}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{du}$

$+\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{du}\right)=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{du}\right)\cdot\dfrac{du}{dx}\right\}=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{du^2}$. これらを与式に代入:

$x^2\left(-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{du}+\dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{du^2}\right)-x\cdot\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{du}-3y=0$ $\therefore \dfrac{d^2y}{du^2}-2\dfrac{dy}{du}-3y=0$.

$\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$ $\therefore \lambda=-1,3$. よって $y=C_1e^{-u}+C_2e^{3u}$

$\therefore y=C_1e^{-\log x}+C_2e^{3\log x}=C_1/x+C_2x^3$

(2) $u=\log x$ とおく. (1)と同様の計算により, $\dfrac{d^2y}{du^2}-4\dfrac{dy}{du}+5y=0$ $\therefore \lambda^2-4\lambda+5=0$

$\therefore \lambda=2\pm i$ $\therefore y=C_1e^{2u}\sin u+C_2e^{2u}\cos u$. $\therefore y=C_1x^2\sin\log x+C_2x^2\cos\log x$.

(3) $u=\log x$ とおく. (1)と同様の計算より. $\dfrac{d^2y}{du^2}+4\dfrac{dy}{du}+4y=0$

$\therefore \lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$ $\therefore \lambda=-2$ (重解) $\therefore y=(C_1+C_2u)e^{-2u}$

$\therefore y=(C_1+C_2\log x)e^{-2\log x}=(C_1+C_2\log x)/x^2$

(4) $y=\log x$ とおく. (1)と同様の計算により. $\frac{d^2y}{du^2}+6\frac{dy}{du}+11y=0$

$\therefore \lambda^2+6\lambda+11=(\lambda+3)^2+2=0$ $\therefore \lambda=-3\pm\sqrt{2}i$ $\therefore y=e^{-3u}(C_1\sin\sqrt{2}u+C_2\cos\sqrt{2}u)$

$\therefore y=e^{-3\log x}(C_1\sin(\sqrt{2}\log x)+C_2\cos(\sqrt{2}\log x))=\underline{(C_1\sin(\sqrt{2}\log x)+C_2\cos(\sqrt{2}\log x))/x^3}$

問題1.3.3

1 推測される特殊解 y_0 は次の通り.

(1) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (2) $y_0 = ae^x$ (3) $y_0 = (a_0x + a_1)e^{-x}$

(4) $y_0 = a\sin x + b\cos x$ (5) $y_0 = ae^x\sin x + be^x\cos x$

(6) $2e^{3x} \to ae^{3x}$, $\sin x \to b\sin x + c\cos x$ $\therefore y_0 = ae^{3x} + b\sin x + c\cos x$

(7) $6x \to a_0x + a_1$, $8e^{2x}$ は基本解 $y = e^{2x}$ の定数倍なので $8e^{2x} \to bxe^{2x}$

$\therefore y_0 = a_0x + a_1 + bxe^{2x}$

(8) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (9) $y_0 = (a_0x + a_1)e^x\sin 2x + (b_0x + b_1)e^x\cos 2x$

(10) $\cos 2x \to a\sin 2x + b\cos 2x$, $5x \to cx + d$ $\therefore y_0 = a\cos 2x + b\cos 2x + cx + d$

(11) 基本解が定数関数を含むので. $2x \to x(a_0x + a_1)$, $3\cos x \to b_1\sin x + b_2\cos x$,

e^{-x} は基本解の定数倍なので. $e^{-x} \to cxe^{-x}$ 以上より.

$y_0 = x(a_0x + a_1) + (b_1\sin x + b_2\cos x) + cxe^{-x}$

2 (i) $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = (\lambda + 2)(\lambda + 4) = 0$ $\therefore \lambda = -2, -4$. よって基本解は $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-4x}$.

よって. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ -2e^{-2x} & -4e^{-4x} \end{vmatrix} = -4e^{-6x} + 2e^{-6x} = -2e^{-6x}$

$$\therefore \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)} = \frac{-\frac{2}{1+e^{2x}} \cdot e^{-4x}}{-2e^{-6x}} = \frac{e^{-4x}}{1+e^{2x}} \cdot e^{6x} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$\therefore \int \frac{-R(x)y_2}{W(y_1, y_2)}dx = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\log(1 + e^{2x})$$

一方, $\dfrac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}=\dfrac{\frac{2}{1+e^{2x}}\cdot e^{-2x}}{-2e^{-6x}}=-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}\cdot e^{6x}=-\dfrac{e^{4x}}{1+e^{2x}}=-\dfrac{e^{2x}(1+e^{2x})-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-e^{2x}$

$\therefore \displaystyle\int\frac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx=\int\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}-e^{2x}\right)dx=\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})-\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore y_0=e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})+e^{-4x}\left\{\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})-\frac{1}{2}e^{2x}\right\}$

$\quad=-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x})$

$\therefore y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-4x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x})$

$\therefore y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{-4x}+\frac{1}{2}(e^{-2x}+e^{-4x})\log(1+e^{2x})\quad \left(C_1-\frac{1}{2}\to C_1\right)$

(2) $\lambda^2+1=0\ \therefore \lambda=\pm i$. よって基本解は $y_1=\sin x,\ y_2=\cos x$. ゆえに

$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1$

$\therefore \dfrac{-R(x)y_2}{W(y_1,y_2)}=\dfrac{-\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x}{-1}=1\quad \therefore \displaystyle\int\frac{-R(x)y_2}{W(y_1,y_2)}dx=\int 1\,dx=x$

一方,

$\dfrac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}=\dfrac{\frac{1}{\cos x}\sin x}{-1}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}\quad \therefore \displaystyle\int\frac{R(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx=\log|\cos x|$

$\therefore y_0=x\sin x+(\cos x)\log|\cos x|\quad \therefore y=C_1\sin x+C_2\cos x+x\sin x+(\cos x)\log|\cos x|$

PAPER 14.1

1 (1) $(3D+2)x^2 = 3Dx^2 + 2x^2 = \underline{6x + 2x^2}$

(2) $(D^3-2D^2+D-4)x^4 = -4x^4 + Dx^4 - 2D^2x^4 + D^3x^4$

$= -4x^4 + 4x^3 - 2(12x^2) + 24x = \underline{-4x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 24x}$

(3) $(D-1)(D+2)e^{2x} = (D-1)(De^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(2e^{2x} + 2e^{2x}) = (D-1)(4e^{2x})$

$= -4e^{2x} + D(4e^{2x}) = -4e^{2x} + 8e^{2x} = \underline{4e^{2x}}$

(4) $(D+4)(D-1)(e^x + \cos x) = (D+4)\{D(e^x + \cos x) - (e^x + \cos x)\}$

$= (D+4)(\cancel{e^x} - \sin x - \cancel{e^x} - \cos x) = (D+4)(-\sin x - \cos x)$

$= D(-\sin x - \cos x) + 4(-\sin x - \cos x) = -\cos x + \sin x - 4\sin x - 4\cos x$

$= \underline{-3\sin x - 5\cos x}$

(5) $(D+1)(D+2)(D+3)\sin x = (D+1)(D+2)(\cos x + 3\sin x)$

$= (D+1)\{(-\sin x + 3\cos x) + 2(\cos x + 3\sin x)\} = (D+1)(5\sin x + 5\cos x)$

$= 5\cos x - \cancel{5\sin x} + \cancel{5\sin x} + 5\cos x = \underline{10\cos x}$

(6) $(D-1)^3(x^4e^{-x}) = (D-1)^2\{(D-1)x^4e^{-x}\}$

$= (D-1)^2\{(4x^3e^{-x} - x^4e^{-x}) - x^4e^{-x}\} = (D-1)^2(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)\{(D-1)(4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)\{(12x^2e^{-x} - 4x^3e^{-x} - 8x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x}) - (4x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x})\}$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 12x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x} - 4x^3e^{-x} + 2x^4e^{-x})$

$= (D-1)(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x})$

$$= \left(24xe^{-x} - 12x^2e^{-x} - 48x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}\right)$$
$$- \left(12x^2e^{-x} - 16x^3e^{-x} + 4x^4e^{-x}\right)$$
$$= 24xe^{-x} - 60x^2e^{-x} + 32x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x} - 12x^2e^{-x} + 16x^3e^{-x} - 4x^4e^{-x}$$
$$= \underline{24xe^{-x} - 72x^2e^{-x} + 48x^3e^{-x} - 8x^4e^{-x}}$$

(7) $(D^2+D+1)(e^x\cos 2x) = e^x\cos 2x + D(e^x\cos 2x) + D^2(e^x\cos 2x)$

$$= e^x\cos 2x + \left(e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x\right) + \left\{e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x - 2\left(e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x\right)\right.$$
$$= \cancel{2e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x + \cancel{e^x\cos 2x} - 2e^x\sin 2x - 2e^x\sin 2x - \cancel{4}e^x\cos 2x$$
$$= \underline{-e^x\cos 2x - 6e^x\sin 2x}$$

(8) $(D-1)(D^2-2D+3)(e^{2x}\sin x)$

$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2D(e^{2x}\sin x) + D^2(e^{2x}\sin x)\right\}$$
$$= (D-1)\left\{3e^{2x}\sin x - 2\left(2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x\right) + \left(4e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x\right)\right\}$$
$$= (D-1)\left(\cancel{3e^{2x}\sin x - 4e^{2x}\sin x} - 2e^{2x}\cos x + 3e^{2x}\sin x + 4e^{2x}\cos x\right)$$
$$= (D-1)\left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$
$$= \left(\cancel{4e^{2x}\sin x} + 2e^{2x}\cos x + 4e^{2x}\cos x - 2e^{2x}\sin x\right) - \left(2e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x\right)$$
$$= \cancel{2e^{2x}\sin x} + 6e^{2x}\cos x - \cancel{2e^{2x}\sin x} - 2e^{2x}\cos x = \underline{4e^{2x}\cos x}$$

$\boxed{2}$ (1) $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6)=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$ より. $\lambda=1,-2,3$

よって基本解は e^{x}, e^{-2x}, e^{3x}. ゆえに. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{3x}$

(2) $\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$ より.

$\lambda=2,-1$ (2重解). よって基本解は e^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}. ゆえに. $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)e^{-x}$.

(3) $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), -1 (2重解). よって

基本解は. $e^{x}, xe^{x}, e^{-x}, xe^{-x}$. よって $y=(C_1+C_2x)e^{x}+(C_3+C_4x)e^{-x}$.

(4) $(\lambda^2+\lambda+1)^2=\left\{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}^2=0$ より. $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (2重解). よって.

基本解は. $e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$. ゆえに

$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+(C_3+C_4x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

(5) $(\lambda-1)^2(\lambda^2-2\lambda+5)=(\lambda-1)^2\{(\lambda-1)^2+4\}=0$ $\therefore \lambda=1$ (2重解), $\lambda=1\pm2i$

よって基本解は $e^{x}, xe^{x}, e^{x}\sin2x, e^{x}\cos2x$.

ゆえに $y=(C_1+C_2x)e^{x}+e^{x}(C_3\sin2x+C_4\cos2x)$

(6) $(\lambda+2)^3(\lambda^2-4\lambda+5)^2=(\lambda+2)^3\{(\lambda-2)^2+1\}^2=0$ より. $\lambda=-2$ (3重解),

$\lambda=2\pm i$ (2重解). よって基本解は $e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\sin x,$

$e^{2x}\cos x, xe^{2x}\cos x$. ゆえに

$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{-2x}+(C_4+C_5x)e^{2x}\sin x+(C_6+C_7x)e^{2x}\cos x$.

$\boxed{3}$ 与式は定数係数3階同次線形なので一般解の形より、基本解は e^{-x},

$e^{x}\sin\sqrt{2}x$, $e^{x}\cos\sqrt{2}x$. よって特性方程式の解は $\lambda=-1,\ 1\pm\sqrt{2}i$. ゆえに.

特性多項式は $(\lambda+1)\{(\lambda-1)^2+2\}=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+3)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda+3$.

一方, 与式の特性多項式は $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c$. 両者を比較して, $a=-1,\ b=1,\ c=3$.

問題1.4.2

$\boxed{1}$ 推測特殊解 y_0 は次の通り.

(1) $y_0 = a_0x^2 + a_1x + a_2$ (2) $y_0 = a\sin x + b\cos x$ (3) $y_0 = ae^x$ (4) $y_0 = a\sin x + b\cos x$

(5) $y_0 = (a_0x + a_1)e^{-x}$ (6) $y_0 = (a_0x^2 + a_1x + a_2)e^{2x}$ (7) $y_0 = ae^{2x}\sin 3x + be^{2x}\cos 3x$

(8) $y_0 = ae^{-x}\sin x + be^{-x}\cos x$

$\boxed{2}$ 推測特殊解 y_0 は次の通り

(1) 基本解が定数関数を含むので $y_0 = x(a_0x^2 + a_1x + a_2)$

(2) 特性方程式は0を2重解にもつので. $y_0 = x^2(a_0x + a_1)$

(3) e^{-3x} は基本解なので. $e^{-3x} \to axe^{-3x}$. ところが axe^{-3x} も基本解の定数倍なので

$axe^{-3x} \to ax^2e^{-3x}$. よって $y_0 = ax^2e^{-3x}$

(4) $2\cos 3x$ は基本解の定数倍なので. $y_0 = x(a\sin 3x + b\cos 3x)$

(5) $e^x\cos x$ は基本解なので, $y_0 = x(ae^x\sin x + be^x\cos x)$

(6) e^x は基本解なので. $e^x \to axe^x$. ところが axe^x も基本解の定数倍なので.

$axe^x \to ax^2e^x$. よって. $y_0 = ax^2e^x$

$\boxed{3}$ (1) $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, $\dfrac{1}{2} \to a$, $\dfrac{1}{2}\cos 2x \to b\sin 2x + c\cos 2x$

$\therefore y_0 = a + b\sin 2x + c\cos 2x$

(2) $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. 基本解が定数関数を含むので. $\dfrac{1}{2} \to ax$

また $-\frac{1}{2}\cos 2x \to b\sin 2x + c\cos 2x$ $\therefore y_0 = ax + b\sin 2x + c\cos 2x$

(3) $2\cos x \cdot \cos 2x = \cos x + \cos 3x$, $\cos x \to a_1 \sin x + a_2 \cos x$, $\cos 3x \to b_1 \sin 3x + b_2 \cos 3x$

$\therefore y_0 = a_1 \sin x + a_2 \cos x + b_1 \sin 3x + b_2 \cos 3x$

(4) $(e^x+1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$, $e^{2x} \to ae^{2x}$, $2e^x \to be^x$, $1 \to c$

$\therefore y_0 = ae^{2x} + be^x + c$